UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA — SCUOLA POLITECNICA

FISICA GENERALE - Sede di La Spezia -

Prova scritta del 13 Luglio 2022

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed espressi con due cifre significative. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile non saranno corretti.

ME1

Un treno di massa M_T viaggia a velocità costante $\vec{v}_T$ su un tratto di binario rettilineo $\overline{OA}$ orizzontale. Sullo stesso binario, in direzione opposta viene movimentato un vagone di massa M_v con velocità $\vec{v}_v$ costante. Ad un certo istante il treno urta il vagone in modo completamente anelastico. Assumendo treno e vagone come puntiformi si determini:

a) la velocità assunta dal convoglio dopo l'urto.

b) Dopo l'urto il convoglio prosegue la sua corsa sul binario che nel punto A presenta una curva circolare di raggio R. Determinare il momento della forza che il binario applica al convoglio e il momento angolare del convoglio, entrambi rispetto al polo A, nell'istante in cui il convoglio ha percorso un quarto di circonferenza e si trova nel punto B.

Nota: per i calcoli si trascurino tutti gli attriti.

[Dati: $v_T = 80\ km/h$; $v_v = 5\ km/h$; $M_T = 10 \cdot M_v$; $M_v = 10 \cdot 10^3 kg$; $R = 500\ m$.]

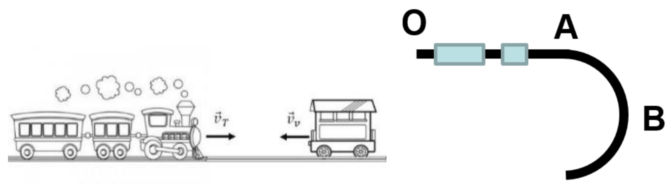


Figura 1

ME2

Una ruota di massa M e raggio R rotola senza strisciare su di un piano orizzontale a causa di un momento torcente costante $\vec{\tau}_m$ applicato sul suo asse di rotazione. Un corpo di massa m_a è connesso all'asse di rotazione della ruota tramite una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) passante attraverso una carrucola anch'essa ideale (di massa trascurabile). Supponendo che la ruota sia approssimabile ad un disco, si calcoli:

a) l'accelerazione della massa m_a.

b) Il valore minimo che deve assumere il coefficiente d'attrito statico affinché la ruota non scivoli.

[Dati: $\tau_m = 3\ Nm$; $R = 20\ cm$; $M = 2m_a$; $m_a = 1kg$]

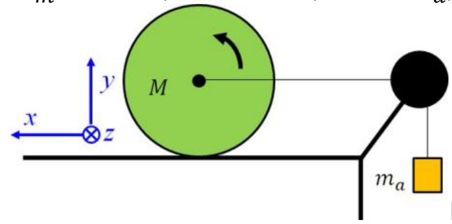


Figura 2

EM1

Nel circuito di figura 3 l'interruttore T è inizialmente aperto, i condensatori C_1 e C_2 sono scarichi mentre ai capi del condensatore C_0 si misura una tensione V_0.

a) L'interruttore viene chiuso. Una volta che il sistema è tornato in condizioni di equilibrio si calcoli la carica affacciata sulle armature di C_1 e l'energia dissipata.

b) Dopo un tempo pari a t^* si osserva che la carica affacciata sul condensatore equivalente si riduce ad 1/10 del valore iniziale. Calcolare la resistenza di perdita R_p.

[Dati: $V_0 = 5\ V$; $C_1 = 2C_0$; $C_2 = C_0/2$; $C_0 = 4.7\ \mu F$; $t^* = 100\ s$]

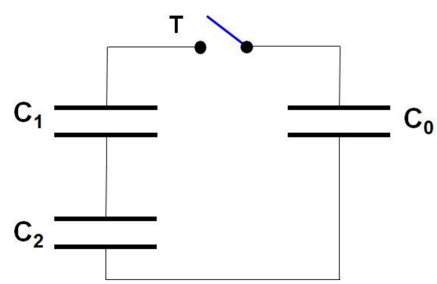


Figura 3

EM2

Una carica positiva q di massa m e velocità $\vec{v} = v \cdot \hat{u}_x$ entra in un semispazio ($x < 0,\ 0 < y < d$) dove è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = -B_0 \cdot \hat{u}_z$ (figura 4). Dopo aver descritto un arco di circonferenza entra in una seconda regione dello spazio dove è presente anche il campo elettrico uniforme $\vec{E} = E_0 \cdot \hat{u}_y$. Nell'istante in cui la particella entra nella seconda regione si calcoli:

a) le componenti cartesiane del vettore velocità.

b) La potenza impressa alla particella e le componenti cartesiane del vettore accelerazione.

[Dati: $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$; $B_0 = 0.50\ T$; $d = 1.0\ cm$; $v = 2.5 \cdot 10^6\ m/s$; $E_0 = 15\ kV/m$; $q = +1.6 \cdot 10^{-19}\ C$]

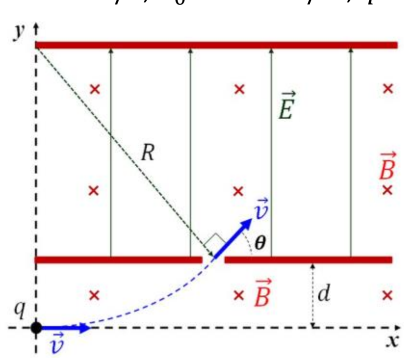


Figura 4

Costanti utili: $g = 9.81\ m/s^2$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\ \frac{Tm}{A}$.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA –SCUOLA POLITECNICA
FISICA GENERALE I - Sede di La Spezia –Prova scritta del 9/02/2022

SOLUZIONI

I valori intermedi non saranno arrotondati, i valori finali saranno arrotondati a 2 cifre significative. Nelle soluzioni useremo $g = 9.81\ m/s^2$, G=6.673·10^{-11} $m^3/(kg \cdot s^2)$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\ H/m$.

ME1

I due treni si muovono lungo un cammino rettilineo e durante l'urto è presente una forza impulsiva che si scambiano treno e vagone, forza che è interna al sistema e quindi in approssimazione impulsiva si conserva la quantità di moto del sistema.

a)

Assumendo l'asse x lungo la direzione del binario e verso nella direzione in cui si muove il treno prima e dopo l'urto la quantità di moto iniziale e finale sono uguali

$P_i = P_f$ con $P_i = M_T v_T + M_v(-v_v)$ e $P_f = (M_T + M_v)V$ con V la velocità del centro di massa

$V = \frac{P_i}{M_T+M_v} = \frac{M_T v_T - M_v v_v}{M_T+M_v} = 20.0758 \frac{m}{s} \approx 20\ m/s$

b)

Non essendoci attrito, il modulo della velocità del convoglio è costante e ciò vale anche quando inizia la curva perché la forza centripeta $\vec{F}$ applicata dal binario non compie lavoro essendo perpendicolare allo spostamento del convoglio $\vec{F} \bullet d\vec{s} = 0 \rightarrow \mathcal{L} = \int \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$. Per lo stesso motivo, anche la forza normale $\vec{N}$ non compie lavoro.

In curva, la seconda legge di Newton proiettata sugli assi fornisce:

In direzione radiale $-F = -(M_T + M_v)a_c = -(M_T + M_v)\frac{V^2}{R} \rightarrow F = (M_T + M_v)\frac{V^2}{R}$

In direzione tangenziale non essendoci attrito non ci sono forze ed il modulo V è costante.

In direzione verticale (asse z verso l'alto) : $N - (M_T + M_v)g = 0 \rightarrow N = (M_T + M_v)g$.

La forza totale agente sul convoglio vale $\vec{F}_{tot} = \left(-(M_T + M_v)\frac{V^2}{R},\ 0, (M_T + M_v)g\right)$

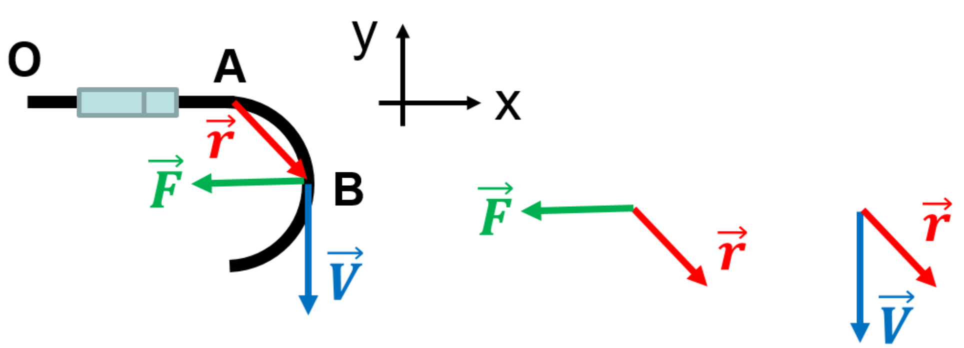


Figura 5

Il calcolo può procedere in modo sintetico oppure analitico considerando che il vettore $\vec{r}$ di modulo $\sqrt{2}R$ forma un angolo di 135° con $\vec{F}$, di 90° con $\vec{N}$ e di 45° con $\vec{V}$.

<u>Modo sintetico</u>

Momento della forza centripeta:

$|\mathcal{M}_c| = |rF \sin 135°| = \ 4.4334 \cdot 10^7 \approx 4.4 \cdot 10^7 N\ m$ con verso entrante nel foglio $(-\hat{u}_z)$

Momento della reazione normale:

$|\mathcal{M}_N| = |rN \sin 90°| = \sqrt{2}R(M_T + M_v)g = \ 7.6304 \cdot 10^8 \approx 7.6 \cdot 10^8 N\ m$ orientato secondo il versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{u}_x - \hat{u}_y)$

.

Il momento complessivo vale $\overrightarrow{\mathcal{M}_{tot}} = (-5.4, -5.4, 0.44) \cdot 10^8\ Nm$
Momento angolare:

$L = r(M_T + M_v)V \sin 45°$= 1.1042$\cdot 10^9 \approx 1.1 \cdot 10^9\ J\ s$ con verso entrante nel foglio ($-\hat{u}_z$)

<u>Modo analitico</u>
Rispetto al sistema di riferimento indicato i vettori sono dati da

$$\vec{r} = r(\cos(-45°), \sin(-45°), 0) = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = R(1, -1, 0)$$
$$\vec{F} = F(-1,0,0)$$
$$\vec{N} = N(0,0,1)$$
$$\vec{V} = V(0,-1,0)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_c} = RF\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-4.4334 \cdot 10^7)Nm \approx (0,0,-4.4 \cdot 10^7)Nm$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_N} = RN\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = RN(-1,-1,0) = 5.3955 \cdot 10^8(-1,-1,0)Nm \approx (-5.4,-5.4,0) \cdot 10^8 Nm$$
Il momento complessivo vale $\overrightarrow{\mathcal{M}_{tot}} = (-5.4, -5.4, 0.44) \cdot 10^8\ Nm$
$$\vec{L} = R(M_T + M_v)V\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1.1042 \cdot 10^9)Nm \approx (0,0,-1.1 \cdot 10^9)\,J\,s$$

ME2
a)

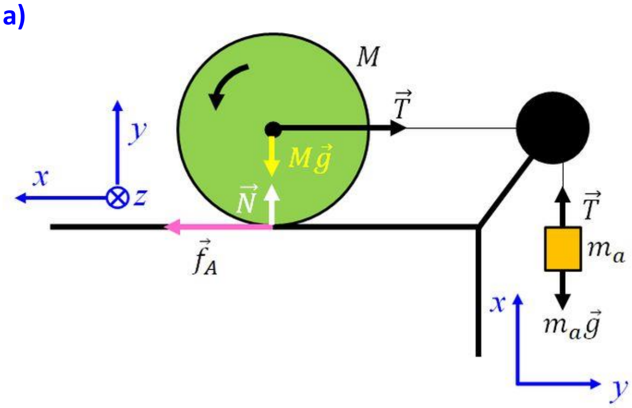


Figura 6
Prima equazione cardinale per la massa M proiettata sugli assi x e y:
y: $N - Mg = 0$ (1)
x: $f_A - T = Ma_{CM}$ (2)
con la condizione di puro rotolamento che impone $v_{CM} = -\omega R$ che derivata diventa $a_{CM} = -\alpha R$ dove il segno meno è dovuto al fatto che rispetto alla terna scelta v_{CM} è positiva mentre la ruota gira in senso antiorario ovvero negativo ($\omega < 0$) visto che l'asse z è entrante nel piano del foglio (rotazioni orarie positive).
Equazione di Newton per la massa puntiforme m_a:
x: $T - m_a g = m_a a_m$ (3)
Poiché la fune è ideale $a_{CM} = a_m = a$
Seconda equazione cardinale della dinamica per la ruota rispetto ad un polo fissato sull'asse di rotazione:
z: $-\tau_m + Rf_A = I\alpha$ (4)
dove *I* è il momento d'inerzia della ruota trattata come un disco omogeneo di massa M e raggio R ($I = \frac{1}{2}MR^2$).

Sommando la (2) e la (3) si ottiene : $f_A - m_a g = (M + m_a)a$

$f_A = m_a g + (M + m_a)a$ (5)

Inserendo la (5) nella (4) si ottiene l'accelerazione:

$R[m_a g + (M + m_a)a] - \tau_m = \frac{1}{2}MR^2\left(-\frac{a}{R}\right)$ $\quad [m_a g + (M + m_a)a] - \frac{\tau_m}{R} = -\frac{1}{2}Ma$

$(M + m_a)a + \frac{1}{2}Ma = \frac{\tau_m}{R} - m_a g$ $\quad a = \frac{\frac{\tau_m}{R} - m_a g}{m_a + \frac{3}{2}M} = \frac{\frac{\tau_m}{R} - m_a g}{4m_a} = \frac{\tau_m}{4m_a R} - \frac{g}{4} = 1.2975\ \frac{m}{s^2} \approx 1.3\ m/s^2$

poiché $M = 2m_a$

b)

Si consideri la definizione di attrito statico: $f_A \leq \mu_S N$.

Inserendo la (5) nella definizione di attrito statico si ottiene $m_a g + (M + m_a)a \leq \mu_S(Mg)$

$m_a g + 3m_a\left[\frac{\tau_m}{4m_a R} - \frac{g}{4}\right] \leq \mu_S(2m_a g)$ $\quad \mu_S \geq \frac{1}{2g}\left\{g + 3\left[\frac{\tau_m}{4m_a R} - \frac{g}{4}\right]\right\}$

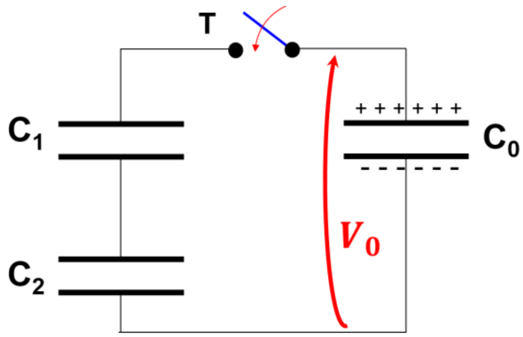
$\mu_S \geq \frac{1}{2g}\left\{g - \frac{3g}{4} + 3\left[\frac{\tau_m}{4m_a R}\right]\right\}$ $\quad \mu_S \geq \frac{1}{8}\left\{1 + \frac{3\tau_m}{m_a g R}\right\} = 0.6984 \approx 0.70$

EM1

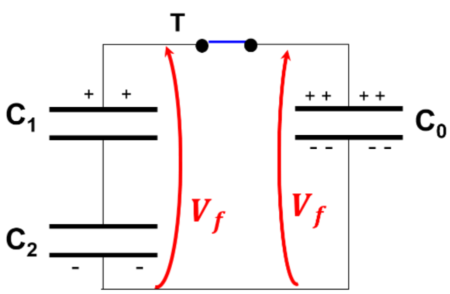
Viste le difficoltà che abbiamo osservato durante la prova d'esame analizziamo brevemente dal punto di vista fisico l'evoluzione del sistema per capire come si può risolvere il problema.

a)

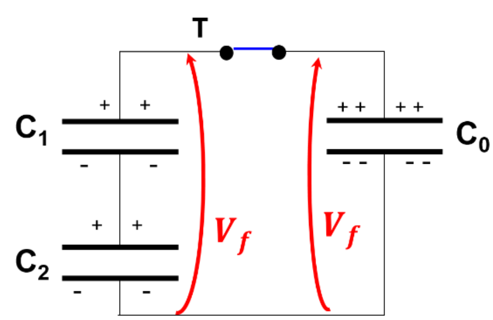
Con il tasto T aperto, per ipotesi, C_1 e C_2 sono scarichi e la tensione ai capi del ramo con i condensatori C_1–C_2 **in serie** vale zero mentre è diversa da zero la caduta di potenziale ai capi di C_0, inizialmente carico.



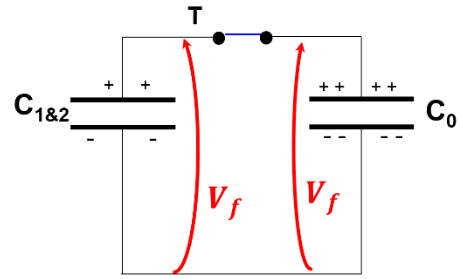
Quando T viene chiuso tutta la parte superiore del circuito deve alla fine essere equipotenziale e lo stesso vale per la parte inferiore e l'eccesso di carica su C_0 si ridistribuisce portando parte delle cariche positive dell'armatura superiore di C_0 sull'armatura superiore di C_1 e la controparte di cariche negative dall'armatura inferiore di C_0 all'armatura inferiore di C_2.



Contemporaneamente, per induzione elettrostatica, sulle armature di su C_1 e su C_2 connesse elettricamente si produce una separazione di carica che fa accumulare una quantità corrispondente di carica. →

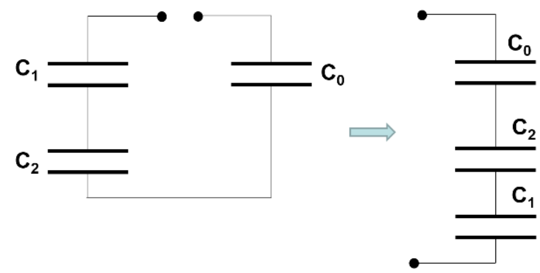


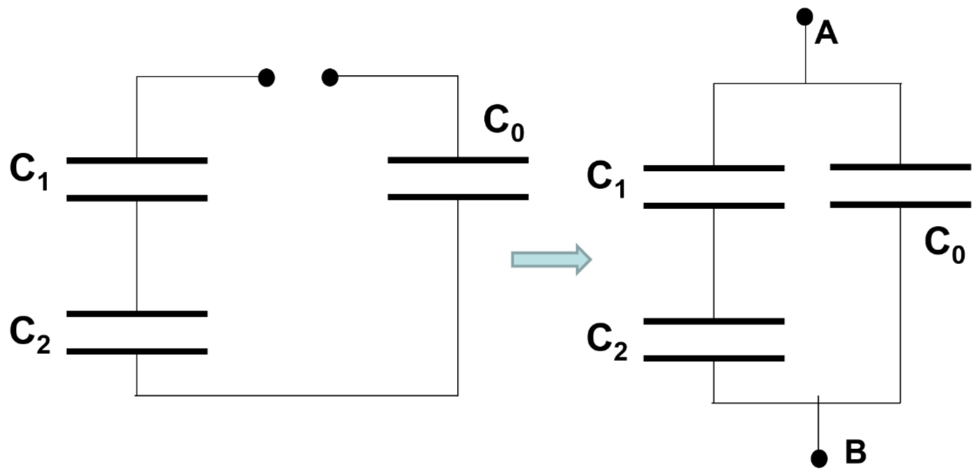
Nota: È anche possibile sostituire la serie $C_1 - C_2$ con il condensatore equivalente e ragionare con esso, in tal caso il ragionamento è più diretto.



Alla fine del processo di ridistribuzione di cariche il sistema raggiunge l'equilibrio e <u>non sono possibili ulteriori migrazioni di cariche</u>.
In questa configurazione la caduta di potenziale ai capi di $C_1 - C_2$ è la stessa di quella misurata ai capi di C_0.

Osservazione: benché "visivamente" i tre condensatori sembrino formare una serie rispetto ai due capi del tasto, essi risultano connessi in parallelo come si evince considerando che la serie $C_1 - C_2$ ha alla fine lo stesso potenziale di C_0.





Infatti il circuito è a tutti gli effetti quello "visto" dai due punti A e B **una volta che il tasto T è chiuso**.
Pertanto la capacità equivalente a cui fa riferimento la domanda successiva è costituita dal parallelo di C_0 con la serie $C_1 - C_2$.

Poiché il sistema dei tre condensatori è isolato è possibile utilizzare il principio di conservazione della carica:

$Q_i = Q_f \rightarrow V_0 C_0 = V_f C_{eq}$ dove la capacità equivalente vale $C_{eq} = C_0 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_0 + \frac{2C_0 \frac{C_0}{2}}{2C_0 + \frac{C_0}{2}} = C_0 + \frac{C_0}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5} C_0$

$\rightarrow V_f = \frac{C_0}{C_{eq}} V_0 = \frac{5}{7} V_0$ pertanto la carica che si affaccia sulla serie $C_{1,2}$ vale $Q_{1,2} = V_f C_{1,2} = \frac{5}{7} V_0 \frac{C_0}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{7} V_0 C_0$

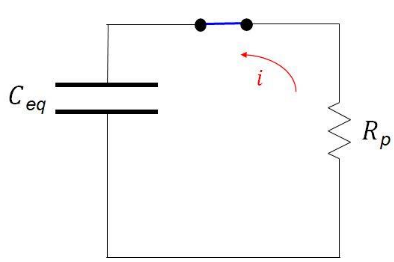
Poiché C_1 e C_2 sono connesse in serie, ne deriva che la carica affacciata sui due condensatori è la stessa.

$Q_1 = Q_2 = Q_{1,2} = \frac{2}{7} V_0 C_0 \approx 6.7143\ \mu C \approx 6.7\ \mu C$

L'energia dissipata vale:

$$U_d = U_i - U_f = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} C_{eq} V_f^2 = \frac{1}{2}\left[C_0 V_0^2 - \frac{7}{5} C_0 \left(\frac{5}{7} V_0\right)^2\right] = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left[1 - \frac{5}{7}\right] = \frac{1}{7} C_0 V_0^2 \approx 16.78571\ \mu J \approx 17\ \mu J$$

b)



Il circuito equivalente è il seguente: **Figura 7**

Supponiamo che la corrente di scarica giri nel verso opposto a quello reale.

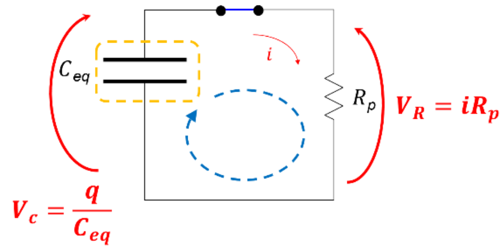
Per la legge della maglia si ha: $\frac{q}{c} + iR_p = 0$ con $i = +\frac{dq}{dt}$

$\frac{q}{C_{eq}} + \frac{dq}{dt}R_p$=0 → $\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_p C_{eq}}$ → $\int_{q_0}^{q_0/10} \frac{dq}{q} = -\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau}$ dove $\tau = R_p C_{eq}$

Da cui $ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{t^*}{\tau}$ ovvero $t^* = \tau \cdot ln(10) \rightarrow R_p = \frac{t^*}{C_{eq} ln(10)} \approx 6.60022\ M\Omega \approx 6.6\ M\Omega$

Osservazione: la funzione analitica che descrive l'andamento della corrente di scarica nel tempo durante il transiente calcolata tramite la definizione $i(t) = +\frac{dq}{dt}$ produrrà una corrente "**negativa**" perché <u>ovviamente</u> la corrente reale circola nel verso opposto a quello assunto per ipotesi in figura 7. (Testo di riferimento: R. A. Serway)

Soluzione alternativa (Testo di riferimento : P. Mazzoldi)



Il condensatore equivalente è carico con l'armatura superiore carica positivamente e quindi a potenziale positivo rispetto all'armatura inferiore. La corrente di scarica esce dall'armatura superiore ed entra nella resistenza dalla parte alta che sarà anche quella a potenziale più elevato (positivo) rispetto all'uscita dalla resistenza.

Scegliendo per la maglia un verso di percorrenza concorde con la corrente si ha che $V_C - V_R = 0$ con $V_C = \frac{q}{C_{eq}}$ e $V_{R_p} = iR_p \rightarrow \frac{q}{C_{eq}} - iR_p = 0$

Ora occorre trovare il legame tra la **carica sulle armature** e la **corrente**: dal principio di conservazione della carica una variazione di carica entro un volume (regione tratteggiata in arancione) è dovuta ad un corrente e nel caso sia uscente dal volume questa causa una diminuzione della carica dentro il volume (equazione di continuità).

La carica del condensatore diminuisce nel tempo e la derivata della carica è perciò $\frac{dq}{dt} < 0$, la corrente è invece il flusso di cariche uscenti dalla regione e quindi è positiva (corrente concorde con la normale alla superficie che è uscente) quindi

$i = -\frac{dq}{dt}$ e sostituendo $\frac{q}{C_{eq}} + R_p \frac{dq}{dt} = 0$

$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_p C_{eq}}$ → $\int_{q_0}^{q_0/10} \frac{dq}{q} = -\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau}$ dove $\tau = R_p C_{eq}$

Da cui $ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{t^*}{\tau}$ ovvero $t^* = \tau \cdot ln(10) \rightarrow R_p = \frac{t^*}{C_{eq} ln(10)} \approx 6.60022\ M\Omega \approx 6.6\ M\Omega$

EM2

a)

A causa del campo magnetico la carica q è soggetta alla forza di Lorentz che le impone una traiettoria circolare con un raggio R calcolato tramite la legge di Newton. Considerando come istante iniziale quello in cui q passa per l'origine del sistema cartesiano considerato si avrà:

$\vec{F}_L = m\, a_{cent} \cdot \hat{u}_y$ dove a_{cent} è l'accelerazione centripeta $a_{cent} = \frac{v^2}{R}$ ed R è il raggio di curvatura della traiettoria di q.

Osservazione: una trattazione del problema formalmente corretta al variare del tempo prevede l'utilizzo di una terna di riferimento cilindrica (il problema ha una geometria piana). Secondo tale terna l'eq. di Newton per q diventa:

$\vec{F}_L = m\, a_{cent} \cdot \hat{u}_r$. Tuttavia, poiché in ogni punto della traiettoria circolare la forza di Lorentz e l'accelerazione centripeta hanno sempre direzione radiale, è possibile descrivere il moto della particella q <u>*limitandosi al solo istante*</u> in cui essa attraversa l'asse delle ordinate. In tale istante la descrizione in termini cartesiani risulta corretta.

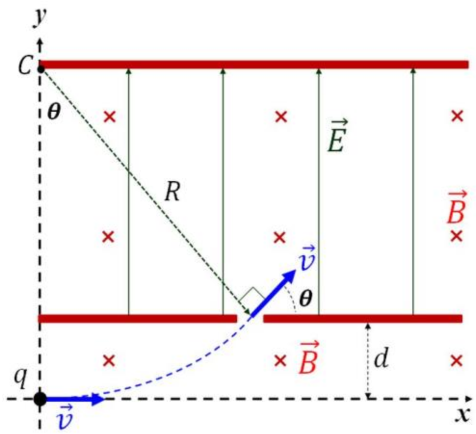


figura 8

Pertanto, si ha: $q(v \cdot \hat{u}_x) \times (-B_0 \cdot \hat{u}_z) = m\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_y \quad \Rightarrow \quad qvB_0\hat{u}_y = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_y$

$\Rightarrow \quad R = \frac{mv}{B_0 q} \approx 0.05219\, m \ \approx 0.052\, m$.

Poiché la forza di Lorentz non fa lavoro, essa cambia solo la direzione ed il verso del vettore velocità ma non il suo modulo. Tale vettore risulta quindi sempre tangente alla traiettoria costituita dalla circonferenza di centro *C* e raggio *R* (vedi figura 8) Pertanto, nell'istante in cui penetra nella regione dove è presente anche il campo elettrico, θ, l'angolo descritto dal vettore velocità risulta definito dalla relazione seguente: $\cos\theta = \frac{R-d}{R}$ ovvero $\theta = arcocos\left(1-\frac{d}{R}\right) \approx 36.0617\,° \approx 36\,°$

$v_x = v\ \cos\theta\ \approx 2.021 \cdot 10^6\, m/s \approx 2.0 \cdot 10^6\, m/s$

$v_y = v\ \text{sen}\,\theta\ \approx 1.4716 \cdot 10^6\, m/s \approx 1.5 \cdot 10^6\, m/s$

b)

La forza totale che la particella subisce quando entra nella regione dello spazio dove è presente anche il campo elettrico vale: $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_L + \vec{F}_C$ dove $\vec{F}_C$ è la forza di Lorentz e $\vec{F}_C$ la forza di Coulomb.

La Potenza impressa alla particella vale : $P = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{v} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} + \vec{F}_C \cdot \vec{v} = \vec{F}_C \cdot \vec{v}$ poiché $\vec{F}_L \perp \vec{v}$

$P = \vec{F}_C \cdot \vec{v} = qE_0 v\ \sin\theta\ \approx 4.85028 \cdot 10^{-9}\ \approx 4.9\, nW$
$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_L + \vec{F}_C = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E} = q\big(v\cos\theta\,\hat{u}_x + v\sin\theta\,\hat{u}_y\big) \times (-B_0 \cdot \hat{u}_z) + qE_0\hat{u}_y$
$\vec{F}_{tot} = B_0 qv\cos\theta\,\hat{u}_y - B_0 qv\sin\theta\,\hat{u}_x + qE_0\hat{u}_y = -B_0 qv\sin\theta\,\hat{u}_x + q(E_0 + B_0 v\cos\theta)\hat{u}_y$
L'accelerazione risulta:
$a_x = -\frac{B_0 qv}{m}\sin\theta\ \approx 7.0498 \cdot 10^{+13}\, m/s^2\ \approx 7.1 \cdot 10^{13}\, m/s^2$
$a_y = \frac{q(E_0 + B_0 v\cos\theta)}{m} \approx 9.8249 \cdot 10^{+13}\, m/s^2\ \approx 9.8 \cdot 10^{13}\, m/s^2$