

I passaggi principali **devono essere leggibili** e corredati di alcune frasi di spiegazione anch'esse leggibili. **I risultati numerici finali devono esser espressi con due cifre significative e in unità del sistema internazionale (SI)**. Gli elaborati anonimi e/o privi di passaggi spiegati e/o di risultati numerici **non** saranno corretti.

Cariche Puntiformi (10 punti)

Sei cariche puntiformi sono disposte come mostrato in figura 1. Si calcoli:

- 1) il vettore campo elettrico risultante nell'origine.
- 2) Il potenziale elettrostatico totale nell'origine $V(0,0)$.
- 3) Il lavoro esterno necessario per portare una carica q_0 dall'infinito nell'origine.

[Dati: $q_1 = q_2 = q_5 = +q$; $q_3 = q_4 = q_6 = -q$; $q = 2.5 \text{ nC}$; $q_0 = 0.5 \text{ nC}$; $a = 1.5 \text{ cm}$]

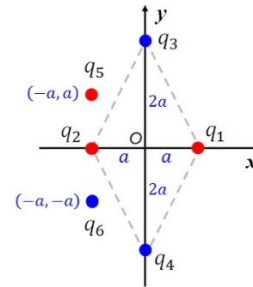


Figura 1

Cariche distribuite (4 punti)

Una bacchetta di materiale isolante di spessore infinitesimo è piegata in modo da descrivere un quarto di circonferenza di raggio R (figura 2). Su di essa è distribuita una carica negativa non uniforme con densità $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cdot \frac{\theta}{\theta_0}$ con θ definito in figura 2. Si calcoli:

- 4) il potenziale elettrostatico da essa generato nell'origine $V(0,0)$. [Dati: $\lambda_0 = -3.5 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$; $\theta_0 = \pi/2$]

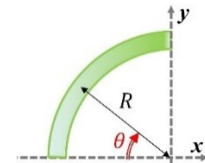


Figura 2

[Dati: $R = 4.5 \text{ cm}$; $\rho = 5.5 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^3$; $q = -8 \cdot 10^{-11} \text{ C}$; $R_A = \frac{3}{4}R$; $R_B = \frac{1}{4}R$]

Teorema di Gauss ed induzione elettrostatica (12 punti)

Si consideri una sfera isolante di raggio R rappresentata in figura 3. Su di essa è distribuita una carica positiva con densità volumica ρ uniforme.

- 5) Si calcoli il vettore campo elettrico ed il suo modulo in un punto distante $R/3$ dal centro della sfera.
- 6) Scegliendo il cammino più opportuno per il calcolo dell'integrale di linea si calcoli la differenza di potenziale $V(B) - V(A)$.

7) Intorno alla sfera carica è presente un guscio sferico metallico di raggio $2R$ e spessore trascurabile su cui è stata trasferita una carica netta q . Si calcoli la densità di carica superficiale (totale) σ distribuita sulla superficie esterna del guscio.

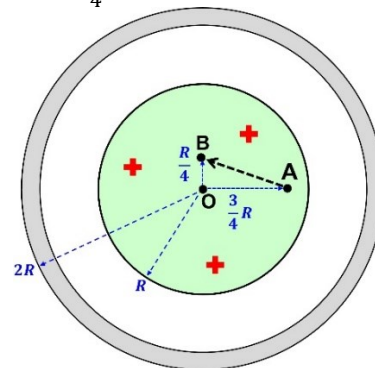


Figura 3

Condensatori (6 punti)

Un condensatore piano di una vecchia radio è costituito da due armature metalliche rettangolari poste a distanza d tra loro (vedi figura 4). Tale condensatore è inizialmente carico e la differenza di potenziale ai suoi capi vale V_0 . Ad un certo istante, ruotando la manopola della sintonia, si spostano le armature di questo condensatore l'una rispetto all'altra fintanto che solo una parte della superficie della prima armatura è ancora posizionata di fronte all'altra pur mantenendo costante la distanza tra loro (figura 4). Supponendo che il condensatore sia un sistema isolato e trascurando gli effetti ai bordi, all'equilibrio, si calcoli:

- 8) la differenza di potenziale finale V_f misurata ai suoi capi.
- 9) Il lavoro compiuto per variare la capacità. [Dati: $V_0 = 1.5 \text{ V}$; $a = 2.0 \text{ cm}$; $d = 50 \mu\text{m}$]

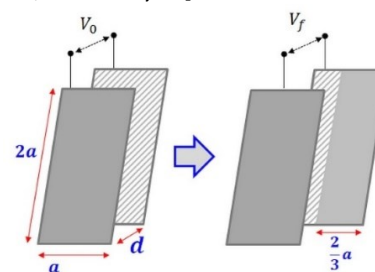


Figura 4

PUNTEGGIO massimo 32

Costanti fisiche utili: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

S-1

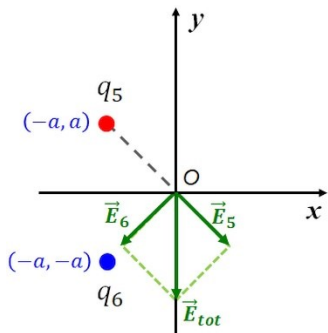


Figura S1: rappresentazione geometrica dei campi elettrici generati dalle cariche q_5 e q_6 nel punto O del piano xy .

Per il principio di sovrapposizione, il campo risultante è la somma dei campi elettrici generati dalle singole cariche. L'origine è equidistante da $q_1 \leftrightarrow q_2$ (entrambe uguali in modulo) e $q_3 \leftrightarrow q_4$ (anch'esse entrambe uguali in modulo). Pertanto, i campi da esse generati nell'origine hanno ugual modulo ma versi opposti ed il loro contributo al campo risultante è nullo. Il contributo dovuto alle due cariche rimanenti $q_5 \leftrightarrow q_6$ produce il seguente campo elettrico nell'origine (vedi figura S1):

$$\vec{E}_5(0,0) = k \frac{q_5}{(\sqrt{2}a)^2} \left(+\cos\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4} \right) = k \frac{(+q)}{2a^2} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{E}_6(0,0) = k \frac{q_6}{(\sqrt{2}a)^2} \left(+\cos\frac{\pi}{4}, +\sin\frac{\pi}{4} \right) = k \frac{(-q)}{2a^2} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = k \frac{q}{2a^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{con } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{tot}(0,0) = \sum_{i=5}^6 \vec{E}_i(0,0) = k \frac{q}{2a^2} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a^2} (0, -\sqrt{2})$$

$$\vec{E}_{tot}(0,0) = (0, -70.6463) \cdot 10^3 \frac{V}{m} \approx (0, -71) \cdot kV/m$$

$$|\vec{E}(0,0)| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \approx 71 \text{ kV/m.}$$

S-2

Il potenziale elettrostatico totale generato dalle sei cariche nell'origine vale:

$$V(0,0) = k \frac{q_1}{a} + k \frac{q_2}{a} + k \frac{q_3}{2a} + k \frac{q_4}{2a} + k \frac{q_5}{\sqrt{2}a} + k \frac{q_6}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{q}{a} + \frac{(-q)}{2a} + \frac{(-q)}{2a} + \frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{(-q)}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} (2 - 1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$V(0,0) \approx 1.4986 \cdot 10^3 \text{ V} \approx 1.5 \text{ kV}$$

S-3

Il lavoro delle forze elettrostatiche per portare q_0 dall'infinito al punto $O(0,0)$ vale:

$$L(\infty \rightarrow 0) = \int_{\infty}^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_0 \left[-\int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \right] = -q_0 [V(0) - V(\infty)] = -q_0 V(0,0)$$

$$L(\infty \rightarrow 0) = -q_0 V(0,0) = -q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \approx -7.4932 \cdot 10^{-7} \text{ J} \approx -0.75 \mu\text{J}$$

$L < 0$ ovvero per avvicinare q_0 è necessario il lavoro di una forza esterna $\Rightarrow L_{est} = -L(\infty \rightarrow 0) \approx +0.75 \mu\text{J}$.

S-4

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\lambda(\theta)Rd\theta)}{R} = \frac{\lambda_0 \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta$$

dove $Rd\theta$ è la lunghezza infinitesima di un elemento di sbarretta curva. Prendendo come zero per l'angolo θ l'asse delle ascisse (vedi figura 1) si ha:

$$V(0,0) = \int dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda_0 \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \theta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \theta_0} \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \theta_0} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \theta_0} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\lambda_0}{16\epsilon_0} \approx -2.4718 \cdot 10^3 \text{ V} \approx -2.5 \text{ kV}$$

S-5

Applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie Σ costituita da una sfera concentrica alla distribuzione di carica ρ di raggio r t.c. $0 < r < R$: $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$

$$\text{raggio } r \text{ t.c. } 0 < r < R: \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$$

visto che ρ è uniforme $\Rightarrow \quad Q_{\Sigma} = \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad \Rightarrow \quad \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$

Proprio grazie all'ipotesi di densità di carica uniforme si osserva che il campo elettrico non può che essere radiale ed uscente: $\vec{E} = E \hat{u}_r$ risultando così parallelo e concorde con la normale alla superficie di Gauss Σ , anch'essa radiale ed uscente: $\hat{u}_n = \hat{u}_r$.

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} E d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Infine, essendo ρ costante, su tutti i punti della superficie Gaussiana Σ ($r = \text{costante}$) il modulo di E non varia e quindi può essere portato fuori dal segno di integrale: $E \int_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

In forma vettoriale: $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r$ ovvero $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$

Nel punto P distante $r = R/3$ il modulo del campo elettrico vale:

$$E\left(r = \frac{R}{3}\right) = \frac{\rho R}{9\epsilon_0} \approx 31.073 \approx 31 \text{ V/m}$$

A-6

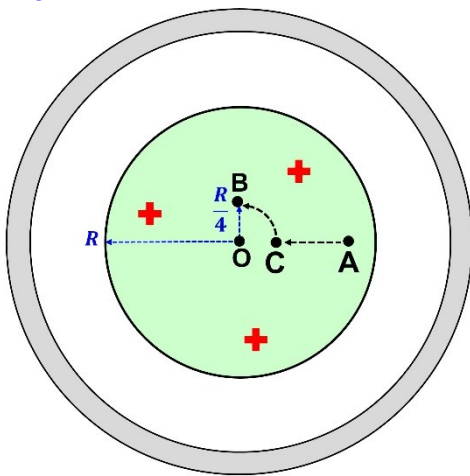


Figura S5: le linee tratteggiate in nero rappresentano i cammini di integrazione scelti per il calcolo del potenziale elettrostatico.

Essendo il campo elettrostatico conservativo, è possibile scegliere il cammino di integrazione più opportuno per calcolare la differenza di potenziale tra A e B . Si sceglie quindi un dominio di integrazione composto ovvero costituito dall'insieme di due linee: un cammino radiale da A al punto intermedio C e da un arco di circonferenza di raggio $\frac{3}{4}R$ dal punto C al punto finale B .

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{s} - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\frac{3R}{4}}^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r \cdot (dr \hat{u}_r) \text{ poiché } \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \text{ lungo il tratto curvo } CB. \text{ Pertanto si ha: } V(B) - V(A) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{\frac{3R}{4}}^R r dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\frac{3R}{4}}^R = \frac{\rho R^2}{12\epsilon_0} \approx 1.0487 \text{ V} \approx 1.0 \text{ V}$$

A-7

La sfera di materiale isolante ha una carica totale $Q_R = \int_{V_R} \rho dv = \rho \int_{V_R} dv = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ poiché ρ è uniforme.

Per effetto dell'induzione elettrostatica la presenza della sfera carica provoca una separazione di carica nel guscio metallico. Se per semplicità si suppone tale guscio come inizialmente neutro, questo implica che sulla sua superficie **interna** si affaccia una carica $Q_{int} = -Q_R = -\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ mentre sulla sua superficie **esterna** si accumula una carica $Q_{est} = +Q_R = +\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

Trattandosi di un guscio metallico, la carica netta q trasferita su di esso si distribuisce **tutta** sulla sua superficie esterna. Pertanto, la carica totale affacciata sulla superficie esterna del guscio vale:

$$Q_{2R} = q + Q_R = q + \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Pertanto, la densità superficiale di carica affacciata sulla superficie esterna del guscio metallico vale:

$$\sigma_{2R} = \frac{q+Q_R}{4\pi(2R)^2} = \frac{q}{4\pi(2R)^2} + \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi(2R)^2} = \frac{q}{16\pi R^2} + \frac{\rho R}{12} \approx -5.797 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m^2} \approx -5.8 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m^2}$$

S-8

Il condensatore costituisce un sistema isolato ovvero è possibile applicare il principio di conservazione della carica tra lo stato iniziale e lo stato finale rappresentati in figura 4:

$$Q_0 = Q_f$$

$$\text{Stato iniziale: } Q_0 = \left(\frac{\varepsilon_0 2a^2}{d}\right) V_0$$

$$\text{Stato finale: } Q_f = C_f V_f = \left(\frac{\varepsilon_0 (2a)(a/3)}{d}\right) V_f = \left(\frac{2\varepsilon_0 a^2}{3d}\right) V_f \quad \text{quindi : } Q_0 = Q_f \Rightarrow \left(\frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}\right) V_0 = \left(\frac{2\varepsilon_0 a^2}{3d}\right) V_f$$

$$V_f = 3V_0 = 4.5 V$$

S-9

$$L_{est} = U_f - U_i = \frac{1}{2} C_f V_f^2 - \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon_0 a^2}{3d}\right) (3V_0)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}\right) (V_0)^2 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V_0^2 (3 - 1) = 2 \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V_0^2$$

$$L_{est} = U_f - U_i \approx 3.186 \cdot 10^{-10} J \approx 3.2 \cdot 10^{-10} J$$