UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA — SCUOLA POLITECNICA
FISICA GENERALE - Sede di La Spezia -
Prova scritta del 9 Febbraio 2022 in "regime di Covid-19"

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed <u>espressi con due cifre significative</u>. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile <u>non saranno corretti</u>.

ME1

Un pendolo di massa M e lunghezza l in quiete viene urtato da una pallina di plastilina di massa M_p che arriva con velocità v_0. Dopo l'urto la pallina è appiccicata alla massa del pendolo che inizia a muoversi. Determinare la velocità minima v_0 affinché il pendolo raggiunga la verticale sopra al punto di sospensione con la fune tesa.
<u>Suggerimento</u>: ricordarsi che il moto del pendolo è circolare e che la velocità tangenziale assume il valore minimo quando la tensione della fune diventa nulla.

[Dati: $l = 30\ cm; M_p = 100\ g; M = 2 \cdot M_p$]

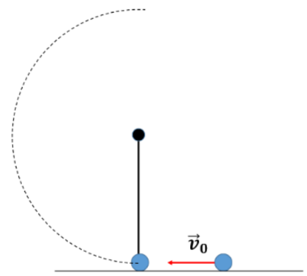


Figura 1

ME2

Nella figura 2 sono mostrati alcuni dei muscoli che permettono il movimento dell'articolazione del braccio, in particolare il muscolo deltoide attaccato all'omero che permette le alzate laterali. A fianco è mostrato un modello meccanico semplificato: il muscolo si attacca ad una distanza d dall'articolazione schematizzata tramite il perno O ed è sollevato di s rispetto all'asse omero-spalla $\overline{AO}$ (supposto fisso). A partire da uno stato di quiete il braccio teso inizia a sollevare un manubrio P di massa M a distanza D da O. Sia $\vec{F}$ la forza che il muscolo deltoide applica parallelamente alla direzione omero-manubrio $\overline{OP}$. Determinare $|\vec{F}|$ necessario per mantenere il sistema braccio-manubrio in equilibrio statico quando il braccio risulta inclinato di 45° rispetto all'asse verticale come mostrato in figura 2.

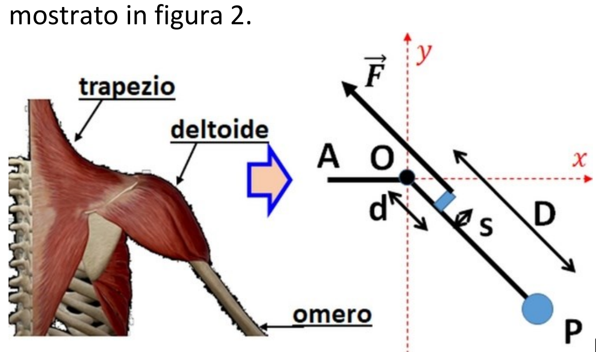


Figura 2

[Dati: $M = 10\ kg;\ d = 15\ cm;\ s = 3\ cm;\ D = 60\ cm;$ la massa del braccio vale $M_b = 3\ kg$]

EM1

Una bacchetta di materiale isolante di spessore infinitesimo è piegata in modo da descrivere un arco di circonferenza di raggio R sotteso da un angolo al centro di 270° (vedi figura 3). Su di essa è distribuita <u>uniformemente</u> una carica negativa totale Q. Si calcoli il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica nell'origine $V(0{,}0)$. [Dati: $Q = -7.8 \cdot 10^{-12}\ C;\ R = 2.2\ cm$]

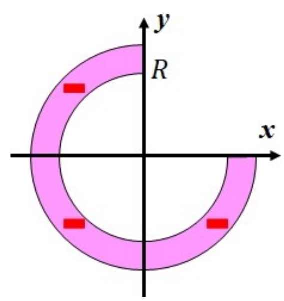


Figura 3

EM2

Si consideri la spira rappresentata in figura 4 in cui circola una corrente stazionaria i. Essa è incernierata in modo da poter ruotare senza attorno all'asse z. Supponendo che tale spira sia immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \cdot (-1{,}0{,}0)$, si calcoli il momento torcente a cui è sottoposta. In che direzione inizia a girare attorno all'asse z ?
[Dati: $B_0 = 3.5\ T;\ a = 2.0\ cm;\ i = 8.5\ A$]

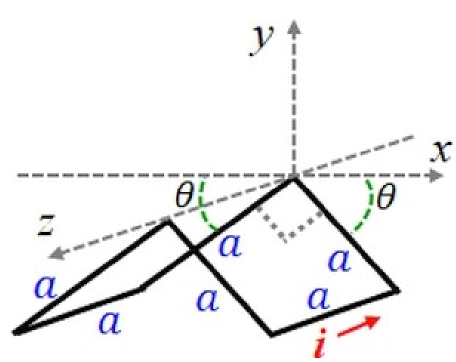


Figura 4

Costanti utili: $g = 9.81\ m/s^2$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\ \frac{Tm}{A}$.

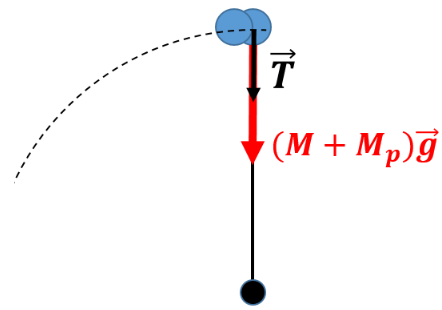
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA –SCUOLA POLITECNICA
FISICA GENERALE I - Sede di La Spezia –Prova scritta del 9/02/2022

SOLUZIONI

I valori intermedi non saranno arrotondati, i valori finali saranno arrotondati a 2 cifre significative. Nelle soluzioni useremo $g = 9.81\ m/s^2$, G=6.673·10^{-11} $m^3/(kg\cdot s^2)$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\ H/m$.

ME1

Consideriamo il sistema formato dalla massa e dalla pallina. Durante l'urto in orizzontale le forze impulsive che vengono scambiate sono interne al sistema e quindi si conserva la quantità di moto in orizzontale (le altre forze esterne sono in direzione verticale e di valore trascurabile in approssimazione impulsiva). Poiché l'urto è totalmente anelastico $P_i = P_f$ con $P_i = M_p v_0$ e $P_f = (M_p + M)V$. Pertanto, la velocità V dei due corpi attaccati immediatamente dopo l'urto vale:
$V = \frac{M_p v_0}{M_p+M} = \frac{v_0}{3}$ ovvero $v_0 = 3V$.



Subito dopo l'urto il pendolo ha massa $(M_p + M)$, velocità iniziale V e sta eseguendo una traiettoria circolare. Poiché per ipotesi si suppone che la fune resti sempre tesa durante tutto il suo moto l'accelerazione centripeta sarà determinata dalla tensione del filo e dalla forza peso.

Equazione di Newton in un punto generico della traiettoria: $\vec{P} + \vec{T} = (M_p + M)\vec{a}$

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale si ottiene:

$dir.\ rad.: -T - (M_p + M)g = -(M_p + M)\frac{v^2}{l}$ dove $a_c = \frac{v^2}{l}$ è l'accelerazione centripeta. La velocità dei due corpi attaccati nel punto più alto della traiettoria assume il valore minimo quando la tensione T del filo vale zero:

$dir.\ rad.: -(M_p + M)g = -(M_p + M)\frac{{v_{min}}^2}{l} \Rightarrow g = \frac{{v_{min}}^2}{l} \Rightarrow {v_{min}}^2 = gl$

Per valutare il valore minimo di V necessario affinché i due corpi passino dal punto più alto con velocità v_{min} applichiamo il principio di conservazione dell'energia tra l'istante immediatamente successivo all'urto e quello in cui i due corpi si trovano nella posizione più elevata. Scegliendo come zero dell'energia potenziale la quota dove avviene l'urto si avrà:

$\frac{1}{2}(M_p + M)V^2 = \frac{1}{2}(M_p + M){v_{min}}^2 + (M_p + M)g(2l) \Rightarrow V^2 = 4gl + {v_{min}}^2 = 5gl \Rightarrow V = \sqrt{5gl}$

Da cui $v_0 = 3V = 3\sqrt{5gl} \approx 11.508\frac{m}{s} \approx 12\frac{m}{s}$

ME2

Il sistema da considerare è il braccio a cui sono applicate: la propria forza peso $M_b\vec{g}$, la forza peso del manubrio in P $M\vec{g}$, la forza applicata dal deltoide $\vec{F}$ e la forza di reazione dell'articolazione $\vec{R}$ applicata in O.

Conderiamo un sostema di riferimento con asse x e y come nella figura alla pagina seguente (asse z uscente).

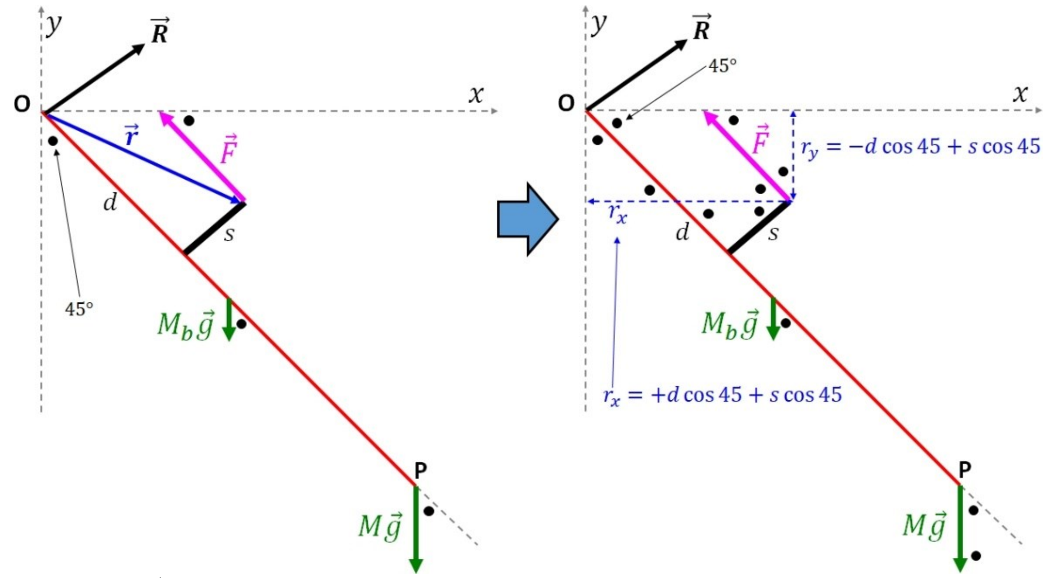
Per le condizioni di equilibrio occore annullare le Eq. Cardinali

$\vec{F} + \vec{R} + M\vec{g} + M_b\vec{g} = \vec{0}$

X: $F_x + R_x = 0$

Y: $F_y + R_y - Mg - M_b g = 0$

Assunto come polo l'articolazione in O, il braccio è ruotato di 45° rispetto all'asse y della figura riportata qui di seguito. I momenti diversi da zero sono quelli delle forze peso e della forza $\vec{F}$, inoltre essi hanno solo componente z .



Poiché $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha:

$$\vec{\tau}_b = \vec{R}^b_{CM} \times M_b\vec{g} = \left(\frac{D}{2}\cos(45°), -\frac{D}{2}\mathrm{sen}(45°), 0\right) \times (0, -M_b g, 0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{D}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{D}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -M_b g & 0 \end{vmatrix} = -\frac{D}{2\sqrt{2}}M_b g \cdot \hat{k}$$

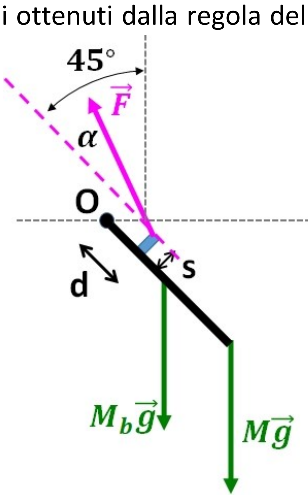
$$\vec{\tau}_P = \overrightarrow{OP} \times M\vec{g} = (D\cos(45°), -D\,\mathrm{sen}(45°), 0) \times (0, -Mg, 0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ D\frac{1}{\sqrt{2}} & -D\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} = -D\frac{1}{\sqrt{2}}Mg \cdot \hat{k}$$

$$\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F} = (d\cos(45°) + s\,cos45°, -d\cos(45°) + s\,cos45°, 0) \times (-F\ \cos 45°, F\ \sin 45°, 0) =$$

$$\vec{\tau}_F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} & -\frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{F}{\sqrt{2}} & \frac{F}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{F}{\sqrt{2}}\left[\frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}}\right] - \left(-\frac{F}{\sqrt{2}}\right)\left[-\frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}}\right]\right) \cdot \hat{k} = sF \cdot \hat{k}$$

Pertanto la proiezione lungo l'asse z della seconda equazione cardinale relativa allo stato di equilibrio descritto in figura vale: $sF - \frac{D}{2\sqrt{2}}M_b g - D\frac{1}{\sqrt{2}}Mg = 0 \Rightarrow sF = \frac{Dg}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}M_b + M\right) \Rightarrow F = \frac{Dg}{\sqrt{2}\,s}\left(\frac{1}{2}M_b + M\right) \approx 1595.4\ N \approx 1.6\ kN$

Osservazione 1: Tali calcoli potevano anche essere svolti più semplicemente osservando che la componente z del prodotto contiene solo la forza e parte di distanza perpendicolare alla direzione della forza con i segni ottenuti dalla regola della mano destra: $sF - \frac{D}{2}\cos 45°\, M_b g - D\cos 45°\, Mg = 0$.



Osservazione 2: se si confronta la forza peso dovuta al manubrio in P di circa 100 N ($Mg = 98.1\ N$) con la forza che il muscolo dovrebbe applicare ($1600\ N \sim 160\ kg_f$) si nota che la leva del braccio è estremamente svantaggiosa e con tale movimento laterale sarebbe impossibile sollevare pesi che normalmente si sollevano: per persone con un certo allenamento queste sono proprio dell'ordine di 10 kg_f ma il muscolo deltoide non arriva a sviluppare tale forza di 160 kg_f.

D'altra parte, il modello che è stato utilizzato è molto semplificato perché nella realtà il muscolo si collega all'omero circa a metà della lunghezza con un angolo α dell'ordine di 10°-15° e quindi parte della distanza d viene a contare nel calcolo <u>riducendo il valore di F</u>. Riscriviamo il momento della forza F e tenendo conto dell'inclinazione supplementare descritta dall'angolo α:

$$\vec{\tau}_F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d\cos(45°) + s\sin(45°) & -d\sin(45°) + s\cos(45°) & 0 \\ -F\sin(45° - \alpha) & F\cos(45° - \alpha) & 0 \end{vmatrix} =$$

$\vec{\tau}_F = [(d\cos(45°) + s\sin(45°))F\cos(45° - \alpha) - (-d\sin(45°) + s\cos(45°))(-F\sin(45° - \alpha))] \cdot \hat{k} =$
$\vec{\tau}_F = [d\cos(45°)\,F\cos(45° - \alpha) + s\sin(45°)\,F\cos(45° - \alpha) - d\sin(45°)\,F\sin(45° - \alpha) + s\cos(45°)F\sin(45° - \alpha)] \cdot \hat{k}$
$\vec{\tau}_F = [dF(\cos(45° + 45° - \alpha)) + sF(\sin(45° + 45° - \alpha))] \cdot \hat{k} = [dF\cos(90° - \alpha) + sF\sin(90° - \alpha)] \cdot \hat{k}$
$\vec{\tau}_F = [dF\ \sin\alpha + sF\cos\alpha] \cdot \hat{k} = F[d\ \sin\alpha + s\cos\alpha] \cdot \hat{k}$ che va sostituita nella seconda equazione cardinale della dinamica:

Z: $\quad F(d\ \sin\alpha + s\cos\alpha) - \left(\frac{D}{2}\right)M_b g\cos 45° - DMg\cos 45° = 0$

Quindi per $\alpha = 15°$ si ha $\quad F = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)M_b g\cos 45° + DMg\cos 45°}{d\ \sin\alpha + s\cos\alpha} = \frac{Dg}{2\sqrt{2}}\frac{M_b + M}{[d\ \sin\alpha + s\cos\alpha]} = 705.9\ N \approx 0.71\ kN$

Ovvero la forza F si è dimezzata!

EM1

Poiché per ipotesi la carica è distribuita in modo uniforme sulla sbarretta curva è possibile definire la densità lineare di carica nel modo seguente: $\lambda = \frac{Q}{\left(\frac{3}{4}2\pi R\right)} = \frac{2Q}{3\pi R}$

I potenziale infinitesimo generato da un elementino dq di carica a distanza R vale:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\lambda R d\theta)}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}d\theta$$

dove $Rd\theta$ è la lunghezza infinitesima di un elemento di sbarretta curva. Prendendo come zero per l'angolo θ l'asse delle ordinate si ha:

$$V(0,0) = \int\ dV = \int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}[\theta]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi\lambda}{8\pi\varepsilon_0} = \frac{3\lambda}{8\varepsilon_0} = \frac{3}{8\varepsilon_0}\frac{2Q}{3\pi R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx -3.188\,V \quad \approx -3.2\,V$$

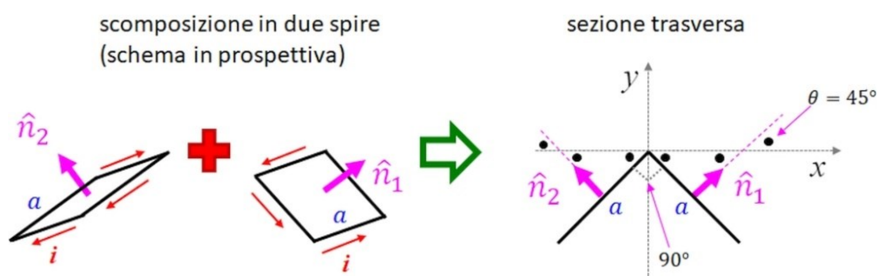
EM2

La spira può essere immaginata come scomposta in due spire che condividono il tratto di filo lungo l'asse z in cui scorrono due correnti opposte (vedi figura qui sotto). I versori normali alle superfici delle due spire sono definiti dalla circolazione della corrente i e pertanto risultano:

$$\hat{n}_1 = \cos\theta \cdot \hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y$$

$$\hat{n}_2 = -\cos\theta \cdot \hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y$$

Poiché le due spire formano un angolo retto, θ è necessariamente uguale a 45°.



Il momento magnetico della spira data dal problema sarà quindi la somma vettoriale dei due momenti magnetici in cui essa è stata scomposta:

$$\vec{m} = ia^2 \cdot (\cos\theta \cdot \hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y) + ia^2 \cdot (-\cos\theta \cdot \hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y) = 2ia^2\operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y$$

Il momento torcente vale: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = (2ia^2\operatorname{sen}\theta \cdot \hat{u}_y) \times (-B_0\hat{u}_x)$

$$\vec{\tau} = -2ia^2\operatorname{sen}\theta\,B_0(\hat{u}_y \times \hat{u}_x) = -2ia^2\operatorname{sen}\theta\,B_0(-\hat{u}_z) = 2ia^2\operatorname{sen}\theta\,B_0 \cdot \hat{u}_z$$

$|\vec{\tau}| = 2ia^2\operatorname{sen}\theta\,B_0 \approx 0.0168\,Nm \approx 1.7 \cdot 10^{-2}Nm$ La spira ruota in senso antiorario rispetto all'asse z.