UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA — SCUOLA POLITECNICA

FISICA GENERALE — Sede di Spezia — compitino N. 1 del 29/11/2020

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed espressi con due cifre significative. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile non saranno corretti.

1) Dimensioni ed unità di misura (2 punti)

Eseguire l'analisi dimensionale dell'energia cinetica K [K] e calcolare le sue unità di misura {K} nel sistema SI.

2) Cinematica-1 (10 punti)

Un ragazzino dispettoso prende la mira e scaglia un pallone contro una finestra posta al secondo piano di un palazzo mandandola in frantumi. Si supponga il pallone come un corpo puntiforme che al momento del distacco dal suolo ha un vettore velocità iniziale di modulo v_0 ed inclinazione θ rispetto al piano orizzontale (vedi figura 1). Si consideri che il pallone è calciato all'istante $t = 0\ s$, che la finestra è posizionata ad un'altezza h dalla strada ed il palazzo dista d dal ragazzino. Trascurando l'attrito dell'aria, si calcoli:

a) Il tempo t^* impiegato dal pallone per raggiungere il centro della finestra e mandarla in frantumi;

b) l'altezza h del centro della finestra rispetto al piano stradale.

c) Le componenti del vettore velocità istantanea calcolata all'istante $t^*/2$;

d) il momento angolare del pallone di massa M all'istante iniziale rispetto ad un polo P di coordinate $(d, 0)$.

[Dati: $v_0 = 9.7\ m/s;\ \theta = \frac{\pi}{4}\ rad;\ d = 6.9\ m;\ M = 450\ g;\ g = 9.81\ m/s^2$]

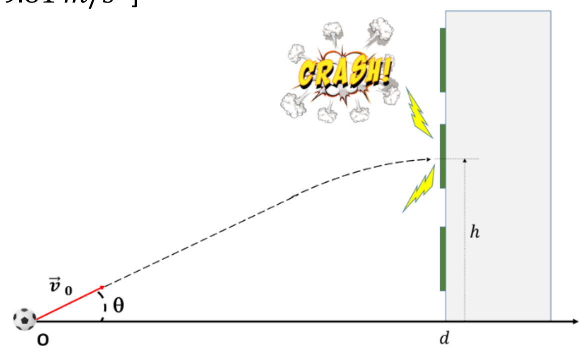

Figura 1

3) Cinematica-2 (4 punti)

Un punto materiale si muove lungo la traiettoria curva rappresentata in figura 2. Ad un certo istante i vettori velocità ed accelerazione istantanea valgono rispettivamente $\vec{v}$ ed $\vec{a}$. Si calcoli il raggio della circonferenza osculatrice in tale istante.

[Dati: $\vec{v} = (2{,}1)\ m/s;\ \ \vec{a} = (1{,}1)\ m/s$]

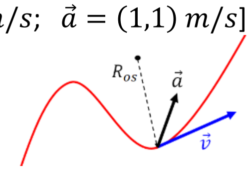

Figura 2

4) Dinamica (16 punti)

Un corpo puntiforme di massa M è a contatto con una molla di costante elastica k compressa di una lunghezza Δx rispetto alla sua lunghezza a riposo (vedi figura 1). Ad un certo istante si rimuove il fermo che tiene compressa la molla ed il corpo M viene lanciato su di un piano orizzontale privo di attrito dove urta in modo completamente anelastico con un secondo corpo puntiforme di massa m inizialmente in quiete. A seguito dell'urto i due corpi attaccati proseguono verso il piano inclinato. Si calcoli:

a) la forza che la molla esercita sul corpo nell'istante in cui si rimuove il fermo;

b) la velocità del corpo M subito prima dell'urto;

c) la velocità dei due corpi attaccati subito dopo l'urto.

Terminato il piano orizzontale liscio i due corpi attaccati iniziano a salire sul di un piano scabro di coefficiente di attrito dinamico μ_d inclinato di un angolo θ rispetto al piano orizzontale. Si calcoli:

d) Il diagramma delle forze agenti su $(M + m)$ e la proiezione della relativa equazione di Newton lungo gli assi coordinati durante il moto sul piano inclinato.

e) L'intensità della reazione normale al piano.

f) L'accelerazione del corpo $(M + m)$.

g) La distanza $\overline{AB}$ percorsa sul piano inclinato dal corpo $(M + m)$ prima di fermarsi.

[Dati: $m = 25\ g;\ M = 75\ g;\ \ \theta = \frac{\pi}{9} rad;\ \ k = 500\ N/m;$ $\Delta x = 1.5\ cm,\ \mu_d = 0.3;\ g = 9.81\ m/s^2$]

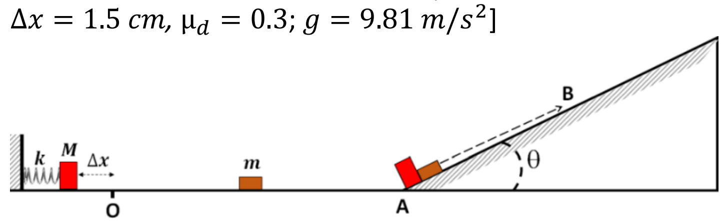

Figura 2

5) Gravitazione (2 punti)

Calcolare l'accelerazione gravità sulla superficie di Marte.

[Dati: $R_M \approx 3.37 \cdot 10^3\ km;\ M_M = 0.64 \cdot 10^{24}\ kg;\ G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$]

SOLUZIONI

1) Dimensioni ed unità di misura

$[K] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [\frac{1}{2}][m][v]^2 = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2T^{-2}$ da cui $\{K\} = kg\, m^2 s^{-2} = J$.

2) Cinematica-1.

a)-b)

Scelto un sistema di riferimento con asse x parallelo al terreno verso destra e asse y verticale verso l'alto con origine nei piedi del ragazzino, l'accelerazione a cui è soggetto il pallone durante tutto il suo moto è $\vec{a} = (0, -g)$ e la sua velocità inziale è descritta dal vettore $\vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta\, , v_0 \mathrm{sen}\,\theta)$.

Per trovare le equazioni del moto del pallone si integra l'accelerazione imponendo per $t = 0\ s$ le seguenti condizioni iniziali: $x(0) = 0,\quad y(0) = 0,\quad v_x(0) = v_0\cos\theta$ e $v_y(0) = v_0 \mathrm{sen}\,\theta$.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\theta \\ v_y(t) = -\int g\, dt = -gt + v_0\ \mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int v_x\, dt = (v_0\cos\theta)t \\ y(t) = \int v_y\, dt = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\ \mathrm{sen}\,\theta)\, t \end{cases}$$

Da cui ricaviamo il tempo dell'impatto t^* e l'altezza della finestra dal piano stradale:

$$\begin{cases} x(t^*) = d = (v_0\cos\theta)t^* \\ y(t^*) = h = -\frac{1}{2}gt^{*2} + (v_0\ \mathrm{sen}\,\theta)\, t^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^* = \frac{d}{v_0\cos\theta} = 1.00598\ s \approx 1.0\ s \\ y(t^*) = h = -\frac{1}{2}g(t^*)^2 + (v_0\ \mathrm{sen}\,\theta)\,(t^*) = 1.9361\ m \approx 1.9\ m \end{cases}$$

c)

Il vettore velocità calcolato nella domanda a) all'istante $t^*/2$ vale:

$$\vec{v}\left(t = \frac{t^*}{2}\right) = \left(v_0\cos\theta\ , -g\frac{t^*}{2} + v_0\ \mathrm{sen}\,\theta\right) = (6.8589, 1.9246\ )m/s \approx (6.9, 1.9\ )m/s$$

Alternativamente il vettore velocità lo si può calcolare come la derivata rispetto al tempo del vettore posizione:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left((v_0\cos\theta)t\, , -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\ \mathrm{sen}\,\theta)\, t\right) = (v_0\cos\theta\ , -gt + v_0\ \mathrm{sen}\,\theta)$$

c)

Detto O il punto in cui il pallone viene calciato, si avrà:

$$\vec{l}_P = (\vec{O} - \vec{P}) \times M\vec{v} = (-d, 0, 0) \times Mv_0(\cos\theta\, , \sin\theta\, , 0) = -dMv_0 \cdot \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} = -dMv_0(0,0,\sin\theta)$$

$$\vec{l}_P = (0, 0, -21.297)\ J\cdot s \approx (0, 0, -21)\ J\cdot s \quad \left|\vec{l}_P\right| \approx 21\, J\cdot s$$

3) Cinematica-2.

Il versore velocità vale: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\ m/s$

Pertanto, all'istante considerato, l'accelerazione tangenziale vale:

$$\vec{a}_t = (\vec{a}\cdot\hat{v})\,\hat{v} = \left[(1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\right]\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{2+1}{5}(2,1) = \frac{3}{5}(2,1)\ m/s^2$$

Da cui si ricava l'accelerazione centripeta: $\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_t = \left(1 - \frac{6}{5}, 1 - \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\ m/s^2$. Pertanto si avrà:

$$R_{osc} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{a} - \vec{a}_t\|} = \frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 5\sqrt{5} \approx 11.1803\ m \approx 11\ m.$$

4) Dinamica del punto materiale

a)

Ponendo l'origine in O (figura 1) si ottiene: $\vec{F}_{molla} = -k(-\Delta x)\hat{u}_x = k\Delta x\ \hat{u}_x \approx 7.5\ \hat{u}_x\ N$

b)

Non vi sono forze dissipative quindi è possibile calcolare la velocità di M subito prima dell'urto tramite la conservazione dell'energia meccanica: $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}Mv^2$ da cui $v = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{M}} = \Delta x\sqrt{\frac{k}{M}} = 1.2247\frac{m}{s} \approx 1.2\ \frac{m}{s}$

c)

L'urto è completamente anelastico. Poiché il sistema dei due corpi non è soggetto a forze esterne orizzontali, la quantità di moto totale lungo il piano si conserva $P_i^{tot} = P_f^{tot}$. Pertanto la velocità delle due masse attaccate subito dopo l'urto vale:

$Mv = (m + M)V$, sapendo che $M = 3m$ si ottiene:

$3mv = 4mV$ da cui: $V = \frac{3}{4}v = 0.9186\frac{m}{s} \approx 0.92\ m/s$

d)

Diagramma delle forze:

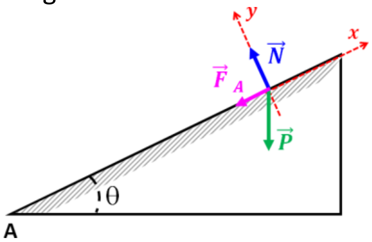

Figura 3

Eq. di Newton per il corpo $(m + M)$: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_A = (m + M)\vec{a}$

Preso un sistema di rifermento con l'asse x parallelo al piano inclinato e rivolto verso l'alto e l'asse y ortogonale ad esso e rivolto anch'esso verso l'alto la proiezione dell'equazione di Newton sugli assi coordinati vale:

(1) x: $-(m + M)g\ sen\ \theta - F_A = (m + M)a$

(2) y: $N - (m + M)g\ cos\ \theta = 0$

A cui si aggiunge la definizione di attrito dinamico: $F_A = \mu_d N$ (3)

e)

$N = (m + M)g\ cos\ \theta = 4mg\cos\theta = 0.9218N \approx 0.92\ N$

f)

il corpo di massa $(m + M)$ decelera:

$a = -g\ sen\ \theta - \mu_d g\cos\theta = -g(\ sen\ \theta + \mu_d\cos\theta) = -6.1207\ m/s^2 \approx -6.1\ m/s^2$

c)

Essendo l'accelerazione costante si può applicare la formula cinematica secondo la quale lo spazio percorso sul piano inclinato vale $s_{AB} = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{-V^2}{-2g(\sin\theta + \mu_D cos\ \theta)} \approx 0.0689\ m \approx 6.9 \cdot 10^{-2}\ m$

<u>Metodo alternativo</u>: il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione dell'energia meccanica: $L_{nc} = \Delta E$

$\Delta E = (m + M)gh - \frac{1}{2}(m + M)V^2 = 4m\left[gs_{AB}\sin\theta - \frac{1}{2}V^2\right]$ con $h = s_{AB}\sin\theta$

Il lavoro della forza d'attrito (non conservativa) sul tratto $\overline{AB}$ vale:

$L_{att.} = \int_A^B \overrightarrow{F_A} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B f_D ds = -\int_A^B \mu_D N ds = -\int_A^B \mu_D(m + M)gcos\ \theta\ ds = -\mu_D 4mgcos\ \theta \int_A^B ds$

$L_{att.} = -\mu_D 4mgcos\ \theta\ s_{AB} \quad \Rightarrow \quad -\mu_D 4mgs_{AB}cos\ \theta = 4m\left[gs_{AB}\sin\theta - \frac{1}{2}V^2\right] \quad \Rightarrow$

$s_{AB} \cdot g(\sin\theta + \mu_D cos\ \theta) = \frac{1}{2}V^2 \quad \Rightarrow \quad s_{AB} = \frac{V^2}{2g(\sin\theta + \mu_D cos\ \theta)}$

5) Gravitazione

Un generico corpo di massa m posto sulla superficie di Marte è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale:

$\vec{F}_G = -G\frac{mM_M}{R_M^2}\hat{u}_r$ dove $\hat{u}_r$ è il versore radiale di un sistema di riferimento in coordinate polari con centro nel pianeta.

Pertanto, per la legge di Newton si ha: $\vec{F}_G = -G\frac{mM_M}{R_M^2}\hat{u}_r = -mg_M\hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad g_M = G\frac{M_M}{R_M^2} \approx 3.7588\ \frac{m}{s^2} \approx 3.8\ \frac{m}{s^2}$