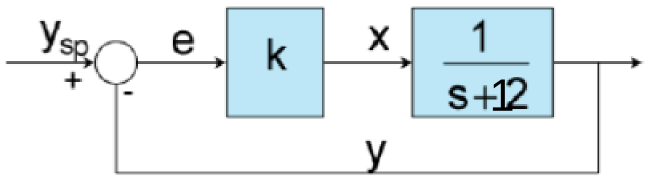
Dinamica e controllo dei sistemi meccanici

appello dell'8 settembre 2014

Rispondere alle seguenti domande (RIPORTARE IN EVIDENZA I NUMERI DI DOMANDA):

1) si consideri un sistema di tipo 0, con guadagno statico 190, senza zeri, con due poli reali con costanti di tempo T_{d1} = 4.5 s e T_{d2} = 0.08 s; si scriva la corrispondente funzione di trasferta $G_p(s)$
2) si scriva la parte reale e la parte immaginaria di tutti i poli del sistema
3) si dica, motivando la risposta, se il sistema in ciclo aperto è stabile, instabile o al limite di stabilità
4) si tracci il diagramma di Bode dell'ampiezza sulla carta logaritmica fornita
5) si descriva l'andamento asintotico della fase di $G_p(s)$
6) si consideri il comportamento di $G_p(s)$ **in ciclo aperto**, a regime, con ingresso a gradino unitario e rampa unitaria: a che valore tende l'uscita nei due casi?
7) si consideri il comportamento **in ciclo chiuso** di $G_p(s)$ con rete di correzione e con retroazione unitarie, ovvero con $G_c(s) = H(s) = 1$ (**disegnare lo schema**); si discutano:
   - la frequenza di taglio
   - il margine di fase MF *(SUGGERIMENTO: stimare la frequenza di taglio dal diagramma asintotico dell'ampiezza e poi calcolare analiticamente la fase a tale frequenza)*
   - la stabilità (citare il criterio di Bode con le necessarie ipotesi)
   - l'errore a regime per ingresso a gradino e per ingresso a rampa
8) si individui una rete di correzione di tipo P, PD, PI o PID tale da ottenere in ciclo chiuso:
   - un errore a regime per ingresso a gradino nullo
   - una frequenza di taglio di circa 15 rad/s
   - un margine di fase di circa 40°
9) si utilizzi il metodo del luogo delle radici per lo studio del seguente sistema il ciclo chiuso:



10) si descriva la rete di correzione a ritardo di fase
11) si facciano esempi di funzioni AND e OR composte in linguaggio ladder

- **OGNI STUDENTE DEVE AVERE SOLO:**
  - **calcolatrice (vietato portare con sé cellulari, PC, tablet, smartphone e similari)**
  - **penna**
  - **matita**
  - **gomma**
  - **righello**
  - **un documento di identità o il libretto universitario**
- **TEMPO PER LO SVOLGIMENTO: 2 ORE**
- **METTERE SU OGNI FOGLIO NOME E COGNOME, ANCHE SUL TESTO, SUI FOGLI DI BRUTTA, SULLA CARTA LOGARITMICA (su cui è possibile scrivere a matita)**

SOLUZIONE

1)

$$G_p(s) = \frac{190}{(1+4.5s)(1+0.08s)}$$

2)

Il sistema $G_p(s)$ ha 2 poli:

$\lambda_1 = -1/T_{d1} = -0.222$ rad/s

$\lambda_2 = -1/T_{d2} = -12.5$ rad/s

3) Il sistema $G_p(s)$ è stabile in ciclo aperto perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.

4) e 5) [Fig. 1, curve nere]

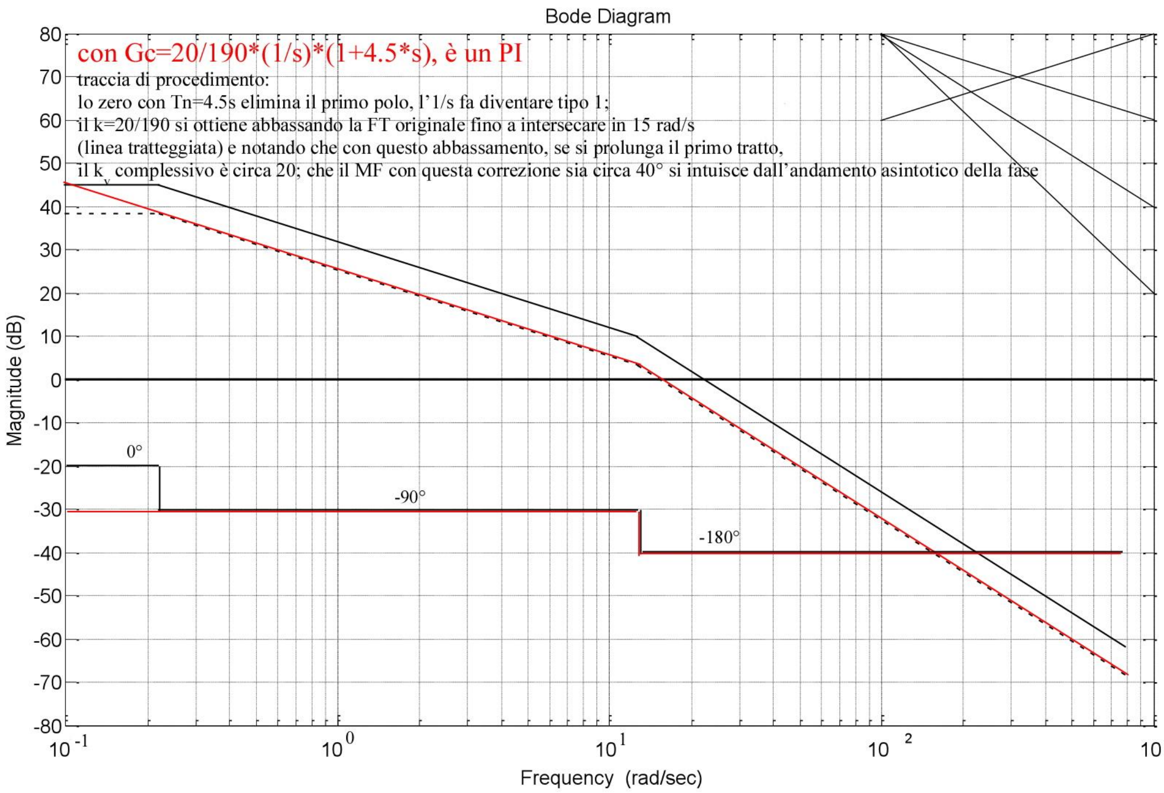


Fig. 1

6)

$$Y(s) = G_p(s)U(s)$$

risposta a gradino unitario:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{190}{(1+4.5s)(1+0.08s)}\frac{1}{s} = 190$$

risposta a rampa unitaria:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{190}{(1+4.5s)(1+0.08s)}\frac{1}{s^2} = \infty$$

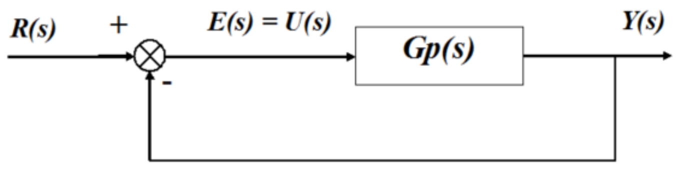
[In generale, per un sistema di tipo 0 in ciclo aperto:

- la risposta a gradino unitario tende al guadagno statico,

- la risposta a rampa unitaria tende ad infinito]

7)

Schema del sistema con retroazione e rete di correzione unitarie ($G_c(s)$ = $H(s)$ = 1):



Dal diagramma di Bode dell'ampiezza si stima una frequenza di taglio ω_t di circa 21 rad/s.

La banda passante del sistema va da 0 rad/s ad ω_t. (in generale, in ciclo chiuso la banda passante si considera arrivare fino ad ω_t).

Calcolo del margine di fase MF:

MF = 180° + φ(ω_t) =

= 180° - arctan ($\omega_t \cdot T_{d1}$) - arctan ($\omega_t \cdot T_{d2}$) =

= 180° - arctan (21·4.5) - arctan (21·0.08) =

= 180° - 89.40° - 59.24° = 31.36°

[nota: in generale, riportare sempre nello scritto tutti i calcoli eseguiti per esteso]

Secondo il criterio di Bode, se sono verificate due condizioni preliminari:

- la FTCA non è instabile
- la FTCA interseca l'asse a 0 dB una sola volta

allora condizione sufficiente per la stabilità della FTCC è che il margine di fase MF ed il margine di guadagno MG siano positivi (MF ed MG hanno sempre segno concorde). In questo caso le condizioni preliminari sono verificate, ed MF > 0; pertanto il sistema è stabile in ciclo chiuso anche senza rete di correzione.

Essendo il sistema di tipo 0:

- l'errore a regime per ingresso a gradino è 1/(1+ k_p) = 1/191 = 0.00524 = 0.52%
- l'errore a regime per ingresso a rampa è ∞

[svolgere le dimostrazioni col teorema del valore finale riportate nelle dispense]

8)

Il sistema è di tipo 0, e si richiede errore nullo a gradino, quindi è necessario portare il tipo a 1, introducendo una rete di correzione che abbia un polo nullo (quindi PI o PID).

Si chiede di abbassare la frequenza di taglio a 15 rad/s, e di alzare il MF a 40°. Graficamente, si ipotizza la FTCA rossa di Fig. 1, in cui il primo tratto piano diventa un prolungamento del tratto a -20 dB/decade (quindi tipo 1), eliminando il primo spigolo, e la cui frequenza di taglio è circa 15 rad/s. Osservando la curva rossa, e prolungando il primo tratto, si vede che il k_v complessivo è circa 20 rad/s; pertanto un primo tentativo è usare una rete PI con la seguente FT:

$$G_c(s) = \frac{20}{190s}(1+4.5s)$$

la quale permette di ottenere la seguente FTCA:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{20}{190s}(1+4.5s)\frac{190}{(1+4.5s)(1+0.08s)} = \frac{20}{s(1+0.08s)}$$

Tale FTCA corrisponde in effetti a una FT di tipo 1 con k_v = 20 ed un polo in 12.5 rad/s, ovvero alla curva rossa. Bisogna ancora verificare il MF, ma dall'andamento della curva rossa della fase si deduce facilmente che MF sarà circa 40°: infatti la fase è esattamente -135° in 12.5 rad/s, corrispondenti a MF = 45°; essendo la frequenza di taglio leggermente maggiore, il MF sarà lievemente minore, quindi di circa 40°. Si può comunque verificare:

MF' = 180° + φ(ω_t) =

= 180° - 90° - arctan ($\omega_t \cdot T_{d2}$) =

= 180° - 90° - arctan (15·0.08) =

= 180° - 90° - 50.20° = 39.80°

Nota: si potrebbe osservare che essendo la frequenza di taglio vicina ad uno spigolo, l'andamento reale dell'ampiezza è un po' più basso rispetto a quello asintotico; eventualmente si potrebbe calcolare l'ampiezza in 15 rad/s con le formule, ed effettuare una piccola correzione del guadagno della rete PI (provare a farlo per esercizio, e verificare i risultati con Matlab; a livello d'esame l'esercizio si può comunque ritenere risolto come sopra).

9)

$$G_1(s) = \frac{kG}{1+kG} = \frac{\frac{k}{s+12}}{1+\frac{k}{s+12}} = \frac{k}{s+12+k}$$

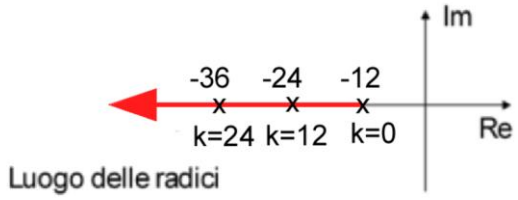
$s+12=0 \Rightarrow$ polo FTCA: $\lambda_G = -12$

$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow \quad 1 + kG(s)$ ha radici in $D(s)+kN(s)=0$

$k=0 \Rightarrow D(s)=0;$ i poli della $G_1(s)$ sono i poli della $G(s)$

$k=\infty \Rightarrow N(s)=0;$ i poli della $G_1(s)$ sono negli zeri della $G(s)$ o all'∞

polo FTCC: $\lambda_{G_1} = -(12+k)$



C'è un solo ramo del luogo delle radici (in quanto è uno il polo della FTCA), e tende asintoticamente a meno infinito sull'asse reale (in quanto non ci sono zeri). Dall'espressione del polo della FTCC, si vede che è sempre reale e negativo, pertanto il sistema in ciclo chiuso è stabile e con comportamento non oscillatorio per ogni valore di *k*.

10)
[vedi dispense]

11)
[vedi dispense]