Dinamica e controllo dei sistemi meccanici

appello del 25 giugno 2014

Rispondere alle seguenti domande (RIPORTARE IN EVIDENZA I NUMERI DI DOMANDA):

1) si consideri un sistema di tipo 0, con guadagno statico 110, senza zeri, con due poli reali con costanti di tempo T_{d1} = 3.5 s e T_{d2} = 0.12 s; si scriva la corrispondente funzione di trasferta $G_p(s)$
2) si scriva la parte reale e la parte immaginaria di tutti i poli del sistema
3) si dica, motivando la risposta, se il sistema in ciclo aperto è stabile, instabile o al limite di stabilità
4) si tracci il diagramma di Bode dell'ampiezza sulla carta logaritmica fornita
5) si descriva l'andamento asintotico della fase di $G_p(s)$
6) si consideri il comportamento di $G_p(s)$ **in ciclo aperto**, a regime, con ingresso a gradino unitario e rampa unitaria: a che valore tende l'uscita nei due casi?
7) si consideri il comportamento **in ciclo chiuso** di $G_p(s)$ con rete di correzione e con retroazione unitarie, ovvero con $G_c(s) = H(s) = 1$ (**disegnare lo schema**); si discutano:
   - la frequenza di taglio
   - il margine di fase MF *(SUGGERIMENTO: stimare la frequenza di taglio dal diagramma asintotico dell'ampiezza e poi calcolare analiticamente la fase a tale frequenza)*
   - la stabilità (citare il criterio di Bode con le necessarie ipotesi)
   - l'errore a regime per ingresso a gradino e per ingresso a rampa
8) si individui una rete di correzione $G_c(s)$ tale da ottenere in ciclo chiuso:
   - una frequenza di taglio circa inalterata
   - un margine di fase circa inalterato
   - un errore a regime per ingresso a gradino nullo

   (suggerimento: ragionare su una rete che cambi opportunamente il diagramma del modulo solo a basse frequenze, e che tenda a 0 dB alle alte frequenze)
9) si parli del metodo del luogo delle radici
10) si descrivano le reti di correzione ad anticipo di fase e a ritardo di fase
11) si discutano le principali differenze tra i microprocessori per elaborazione dati e quelli per automazione

- **OGNI STUDENTE DEVE AVERE SOLO:**
  - **calcolatrice (vietato portare con sé cellulari, PC, tablet, smartphone e similari)**
  - **penna**
  - **matita**
  - **gomma**
  - **righello**
  - **un documento di identità o il libretto universitario**
- **TEMPO PER LO SVOLGIMENTO: 2 ORE**
- **METTERE SU OGNI FOGLIO NOME E COGNOME, ANCHE SUL TESTO, SUI FOGLI DI BRUTTA, SULLA CARTA LOGARITMICA (su cui è possibile scrivere a matita)**

SOLUZIONE

1)

$$G_p(s) = \frac{110}{(1+3.5s)(1+0.12s)}$$

2)

Il sistema $G_p(s)$ ha 2 poli:

$\lambda_1 = -1/T_{d1} = -\ 0.286$ rad/s

$\lambda_2 = -1/T_{d2} = -\ 8.33$ rad/s

3) Il sistema $G_p(s)$ è stabile in ciclo aperto perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.

4) e 5) [Fig. 1, curve nere]

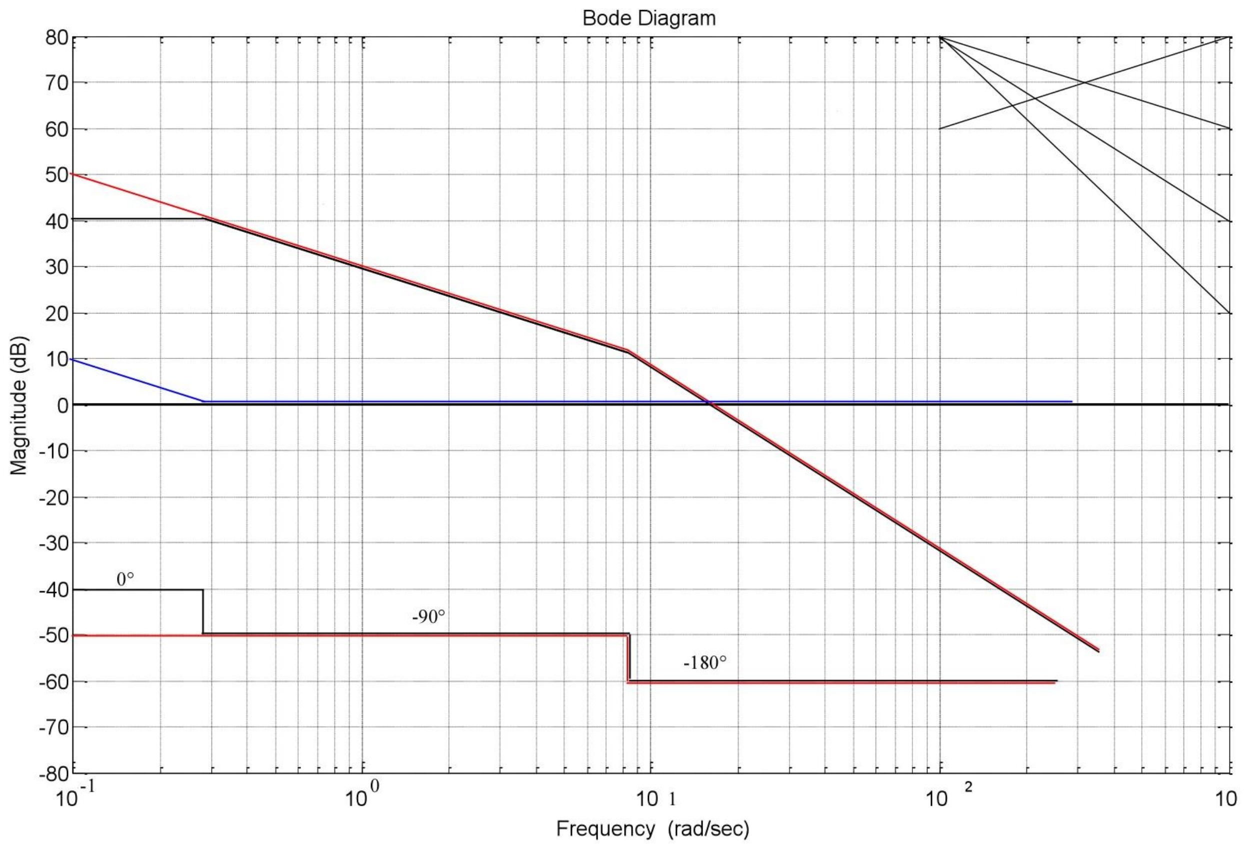


Fig. 1

6)

$$Y(s) = G_p(s)U(s)$$

risposta a gradino unitario:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{110}{(1+3.5s)(1+0.12s)}\frac{1}{s} = 110$$

risposta a rampa unitaria:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{110}{(1+3.5s)(1+0.12s)}\frac{1}{s^2} = \infty$$

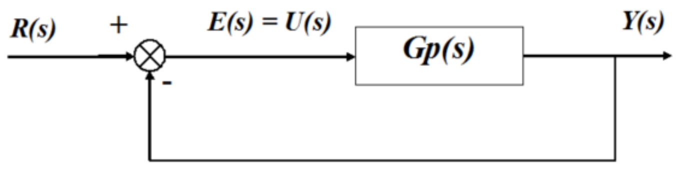
[In generale, per un sistema di tipo 0 in ciclo aperto:

- la risposta a gradino unitario tende al guadagno statico,

- la risposta a rampa unitaria tende ad infinito]

7)

Schema del sistema con retroazione e rete di correzione unitarie ($G_c(s) = H(s) = 1$):



Dal diagramma di Bode dell'ampiezza si stima una frequenza di taglio ω_t di circa 15 rad/s.

La banda passante del sistema va da 0 rad/s ad ω_t. (in generale, in ciclo chiuso la banda passante si considera arrivare fino ad ω_t).

Calcolo del margine di fase MF:

MF = 180° + φ(ω_t) =

= 180° - arctan ($\omega_t \cdot T_{d1}$) - arctan ($\omega_t \cdot T_{d2}$) =

= 180° - arctan (15·3.5) - arctan (15·0.12) =

= 180° - 88.91° - 60.95° = 30.1°

[nota: in generale, riportare sempre nello scritto tutti i calcoli eseguiti per esteso]

Secondo il criterio di Bode, se sono verificate due condizioni preliminari:

- la FTCA non è instabile
- la FTCA interseca l'asse a 0 dB una sola volta

allora condizione sufficiente per la stabilità della FTCC è che il margine di fase MF ed il margine di guadagno MG siano positivi (MF ed MG hanno sempre segno concorde). In questo caso le condizioni preliminari sono verificate, ed MF > 0; pertanto il sistema è stabile in ciclo chiuso anche senza rete di correzione.

Essendo il sistema di tipo 0:

- l'errore a regime per ingresso a gradino è $1/(1+k_p) = 1/111 = 0.00901 = 0.90\%$
- l'errore a regime per ingresso a rampa è ∞

[svolgere le dimostrazioni col teorema del valore finale riportate nelle dispense]

8)

Il sistema è di tipo 0, e si richiede errore nullo a gradino, quindi è necessario portare il tipo a 1, introducendo una rete di correzione che abbia un polo nullo.

Si chiede di non alterare né la frequenza di taglio né MF; quindi in pratica serve una rete di correzione che non cambi la FTCA alle alte frequenze (quindi, che sia 0 dB costanti alle alte frequenze) ma che sia di tipo 1, per introdurre il polo nullo, quindi abbia pendenza -20 dB/decade alle basse frequenze.

Una rete siffatta è una rete PI con la seguente funzione di trasferta:

$$G_c(s) = \frac{k_c}{s}\left(1 + \frac{s}{k_c}\right)$$

L'ampiezza di tale rete infatti tende a 1 (0 dB) per ω che tende a infinito, e tende a infinito per ω che tende a zero (si vede sostituendo $s = j\omega$). Dobbiamo scegliere l'unico parametro, k_c, in modo che il tratto piatto inizi abbastanza a sinistra rispetto alla frequenza di taglio, in modo da non alterare troppo quella zona, e di conseguenza avere ω_t e MF circa inalterati. Ad esempio possiamo imporre, per semplicità, che lo zero di tale rete di correzione corrisponda al primo polo, in 1/3.5 = 0.286 rad/s.

La costante di tempo dello zero è quindi $1 / k_c = 3.5$ s, per cui la rete di correzione risulta:

$$G_c(s) = \frac{1}{3.5s}(1 + 3.5s)$$

In Fig. 1 sono rappresentate sia la rete di correzione G_c (curva blu) sia la FTCA risultante (curva rossa), la cui FT è:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{1}{3.5s}(1+3.5s)\frac{110}{(1+3.5s)(1+0.12s)} = \frac{31.4}{s(1+0.12s)}$$

9)
[vedi dispense: descrivere sinteticamente il metodo del luogo delle radici, le sue finalità, le proprietà dei rami del luogo delle radici]

10)
[vedi dispense]

11)
[vedi dispense]