Dinamica e controllo dei sistemi meccanici

appello del 3 giugno 2014

Rispondere alle seguenti domande (RIPORTARE IN EVIDENZA I NUMERI DI DOMANDA):

1) si consideri un sistema di tipo 0, con guadagno statico 120, uno zero con costante di tempo T_{n1} = 1 s, due poli reali con costanti di tempo T_{d1} = 2.5 s e T_{d2} = 0.15 s; si scriva la corrispondente funzione di trasferta $G_p(s)$
2) si scriva la parte reale e la parte immaginaria di tutti i poli del sistema
3) si dica, motivando la risposta, se il sistema in ciclo aperto è stabile, instabile o al limite di stabilità
4) si tracci il diagramma di Bode dell'ampiezza sulla carta logaritmica fornita
5) si descriva l'andamento asintotico della fase di $G_p(s)$
6) si consideri il comportamento di $G_p(s)$ **in ciclo aperto**, a regime, con ingresso a gradino unitario e rampa unitaria: a che valore tende l'uscita nei due casi?
7) si consideri il comportamento **in ciclo chiuso** di $G_p(s)$ con rete di correzione e con retroazione unitarie, ovvero con $G_c(s) = H(s) = 1$ (**disegnare lo schema**); si discutano:
   - la frequenza di taglio
   - il margine di fase MF *(SUGGERIMENTO: stimare la frequenza di taglio dal diagramma asintotico dell'ampiezza e poi calcolare analiticamente la fase a tale frequenza)*
   - la stabilità (citare il criterio di Bode con le necessarie ipotesi)
   - l'errore a regime per ingresso a gradino e per ingresso a rampa
8) si individui una rete di correzione $G_c(s)$ tale da ottenere in ciclo chiuso:
   - una frequenza di taglio di circa 100 rad/s
   - un margine di fase di circa 70°
   - un errore a regime per ingresso a gradino minore del 3.5%
9) si forniscano le definizioni di margine di fase MF e di margine di guadagno MG
10) si disegni lo schema di un sistema in ciclo chiuso con F.T. del regolatore $G_c(s)$, F.T. del sistema da controllare $G_p(s)$, F.T. del sistema di misura $H(s)$, e si dimostri che la F.T. tra l'ingresso $R(s)$ e l'uscita misurata dal sensore $Y_m(s)$ è:
$$\frac{Y_m(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$$
11) si discuta (per sommi capi) il metodo di scomposizione di polinomi a coefficienti reali in addendi elementari

- **OGNI STUDENTE DEVE AVERE SOLO:**
  - **calcolatrice (vietato portare con sé cellulari, PC, tablet, smartphone e similari)**
  - **penna**
  - **matita**
  - **gomma**
  - **righello**
  - **un documento di identità o il libretto universitario**
- **TEMPO PER LO SVOLGIMENTO: 2 ORE**
- **METTERE SU OGNI FOGLIO NOME E COGNOME, ANCHE SUL TESTO, SUI FOGLI DI BRUTTA, SULLA CARTA LOGARITMICA (su cui è possibile scrivere a matita)**

SOLUZIONE

1)

$$G_p(s) = \frac{120(1+s)}{(1+2.5s)(1+0.15s)}$$

2)

Il sistema $G_p(s)$ ha 2 poli:

$\lambda_1 = -1/T_{d1} = -\ 0.400$ rad/s

$\lambda_2 = -1/T_{d2} = -\ 6.67$ rad/s

3) Il sistema $G_p(s)$ è stabile in ciclo aperto perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.

4) e 5) [Fig. 1, curve nere]

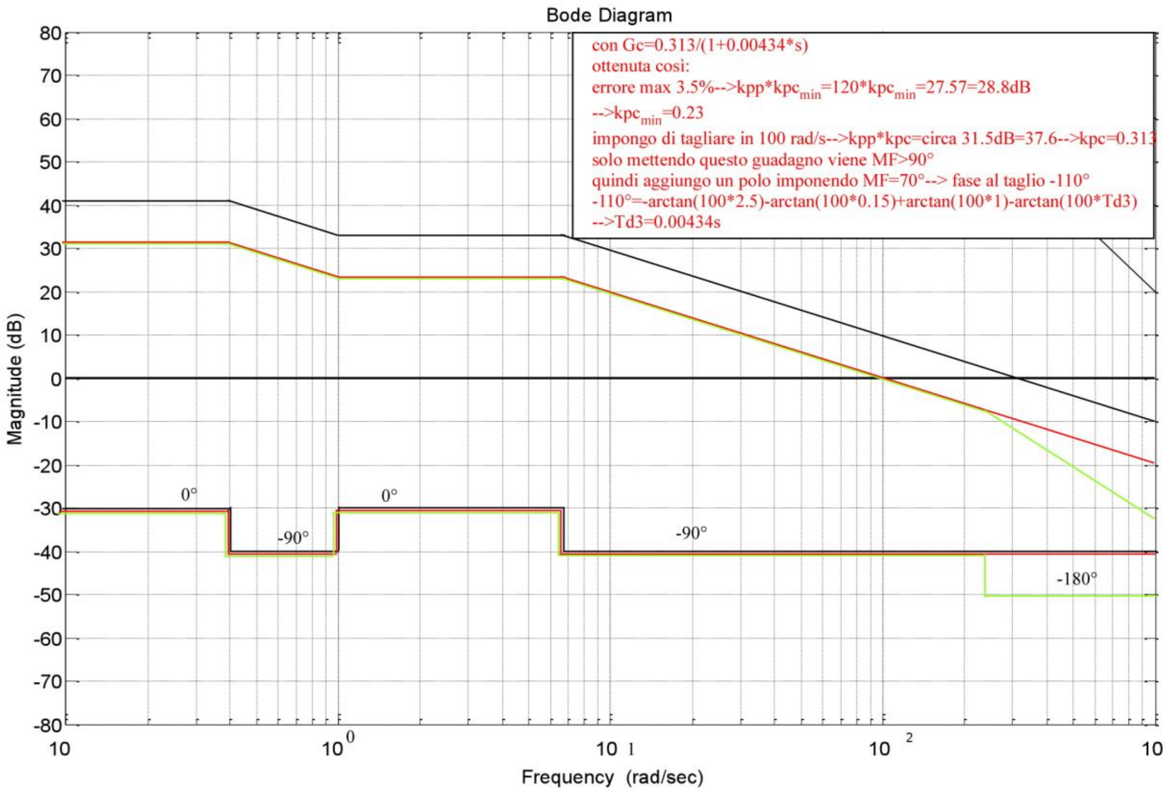


Fig. 1

6)

$Y(s) = G_p(s)U(s)$

risposta a gradino unitario:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{120(1+s)}{(1+2.5s)(1+0.15s)} \frac{1}{s} = 120$$

risposta a rampa unitaria:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{120(1+s)}{(1+2.5s)(1+0.15s)} \frac{1}{s^2} = \infty$$

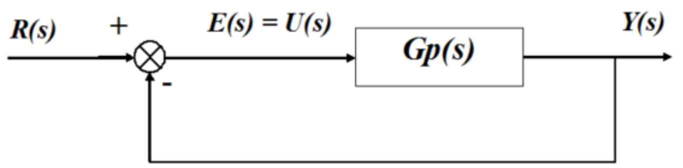
[In generale, per un sistema di tipo 0 in ciclo aperto:

- la risposta a gradino unitario tende al guadagno statico,

- la risposta a rampa unitaria tende ad infinito]

7)

Schema del sistema con retroazione e rete di correzione unitarie ($G_c(s) = H(s) = 1$):



Dal diagramma di Bode dell'ampiezza si stima una frequenza di taglio ω_t di circa 300 rad/s.

La banda passante del sistema va da 0 rad/s ad ω_t. (in generale, in ciclo chiuso la banda passante si considera arrivare fino ad ω_t).

Calcolo del margine di fase MF:

MF = 180° + $\varphi(\omega_t)$ =

= 180° + arctan ($\omega_t \cdot T_{n1}$) - arctan ($\omega_t \cdot T_{d1}$) - arctan ($\omega_t \cdot T_{d2}$) =

= 180° + arctan (300· 1) - arctan (300· 2.5) - arctan (300· 0.15) =

= 180° + 89.81° - 89.93° - 88.73° = 91.2°

[nota: in generale, riportare sempre nello scritto tutti i calcoli eseguiti per esteso]

Secondo il criterio di Bode, se sono verificate due condizioni preliminari:

- la FTCA non è instabile
- la FTCA interseca l'asse a 0 dB una sola volta

allora condizione sufficiente per la stabilità della FTCC è che il margine di fase MF ed il margine di guadagno MG siano positivi (MF ed MG hanno sempre segno concorde). In questo caso le condizioni preliminari sono verificate, ed MF > 0; pertanto il sistema è stabile in ciclo chiuso anche senza rete di correzione.

Essendo il sistema di tipo 0:

- l'errore a regime per ingresso a gradino è $1/(1+ k_p) = 1/121 = 0.0082 = 0.82\%$
- l'errore a regime per ingresso a rampa è ∞

[svolgere le dimostrazioni col teorema del valore finale riportate nelle dispense]

8)

Il sistema è di tipo 0; non si richiede errore nullo a gradino, quindi non è necessario portare il tipo a 1 [se non è richiesto, di solito non si fa].

Per avere un errore minore del 3.5%, il guadagno statico complessivo del sistema ($k_{p,tot} = k_{p,c} \cdot k_{p,p}= 120k_{p,c}$) deve essere maggiore di 27.57 (circa 29 dB).

[svolgere per esteso i calcoli partendo da $E\%_{,reg} = 1/(1+k_{p,tot})$]

Graficamente, si osserva che per tagliare a 100 rad/s usando una rete di correzione solo proporzionale si dovrebbe abbassare il guadagno statico complessivo a circa 31.5 dB = 37.6, traslando il grafico dell'ampiezza in basso con un guadagno $k_{p,c} < 1$; imponendo $120 \cdot k_{p,c} = 37.6$ si ottiene $k_{p,c} = 0.313$ [vedi curve rosse di Fig. 1].

Questa rete soddisfa i requisiti sulla precisione (il guadagno statico complessivo è > di 29 dB) e di frequenza di taglio, ma il MF è troppo alto (si deduce dall'andamento asintotico della fase, non alterato dal guadagno statico, che MF è sicuramente > 90°); si deve quindi introdurre un polo per abbassare la fase. Si impone il MF per individuare il polo:

$70° = 180° + \varphi(\omega_t) =$

$= 180° + \arctan(100 \cdot 1) - \arctan(100 \cdot 2.5) - \arctan(100 \cdot 0.15) - \arctan(100 \cdot T_{d3}) =$

da cui si ottiene la costante di tempo del polo $T_{d3} = 0.00434$ s [svolgere i calcoli per esteso].

La FTCA corretta è rappresentata sul diagramma di Bode [vedi curve verdi di Fig. 1]. Essendo il nuovo polo a destra di 100 rad/s, la ω_t stessa non viene alterata. La rete di correzione soddisfa quindi tutte le specifiche. La funzione di trasferta della rete di correzione è:

$$G_c(s) = \frac{0.313}{1+0.00434s}$$

9)
[vedi dispense]

10)
[vedi dispense]

11)
[vedi dispense, riassumere i concetti principali sulla scomposizione di un polinomio di ordine *n* a coefficienti reali e variabile complessa in termini di primo ordine (radici reali) e secondo ordine (radici complesse coniugate)]