Dinamica e controllo dei sistemi meccanici

appello del 14 aprile 2014

Rispondere alle seguenti domande (RIPORTARE IN EVIDENZA I NUMERI DI DOMANDA):

1) si consideri un sistema di tipo 1, con guadagno $k_v = 20$, uno zero con costante di tempo $T_{n1} = 1$ s, un polo reale corrispondente ad una costante di tempo $T_{d1} = 0.25$ s e due poli complessi coniugati caratterizzati da $\omega_n = 200$ rad/s e $\zeta = 0.7$; si scriva la corrispondente funzione di trasferta $G_p(s)$
2) si scriva la parte reale e la parte immaginaria di tutti i poli e di tutti gli zeri del sistema
3) si dica, motivando la risposta, se il sistema in ciclo aperto è stabile, instabile o al limite di stabilità
4) si tracci il diagramma di Bode dell'ampiezza sulla carta logaritmica fornita
5) si descriva l'andamento asintotico della fase di $G_p(s)$
6) si consideri il comportamento di $G_p(s)$ **in ciclo aperto**, a regime, con ingresso a gradino unitario e rampa unitaria: a che valore tende l'uscita nei due casi?
7) si consideri il comportamento **in ciclo chiuso** di $G_p(s)$ con rete di correzione e con retroazione unitarie, ovvero con $G_c(s) = H(s) = 1$ (**disegnare lo schema**); si discutano:
   - la frequenza di taglio
   - il margine di fase MF *(SUGGERIMENTO: stimare la frequenza di taglio dal diagramma asintotico dell'ampiezza e poi calcolare analiticamente la fase a tale frequenza)*
   - la stabilità (citare il criterio di Bode con le necessarie ipotesi)
   - l'errore a regime per ingresso a gradino e per ingresso a rampa
8) si individui una rete di correzione $G_c(s)$ tale da ottenere in ciclo chiuso:
   - una frequenza di taglio di circa 200 rad/s
   - un margine di fase di almeno 30°
   - un errore a regime per ingresso a gradino nullo
9) si consideri un generico sistema dinamico lineare, in ciclo aperto, con funzione di trasferta $G(s)$; come si calcola la sua risposta ad un ingresso impulsivo unitario? perché?
10) si disegni lo schema di un sistema in ciclo chiuso con F.T. del regolatore $G_c(s)$, F.T. del sistema da controllare $G_p(s)$, F.T. del sistema di misura unitaria, e si dimostri che la F.T. tra l'ingresso $R(s)$ e l'errore $E(s)$ è:
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}$$
11) si parli del linguaggio ladder per la programmazione dei PLC con Input e Output digitali in generale, ed in particolare si descriva il funzionamento del timer, riportandone lo schema

- **OGNI STUDENTE DEVE AVERE SOLO:**
  - **calcolatrice (vietato portare con sé cellulari, PC, tablet, smartphone e similari)**
  - **penna**
  - **matita**
  - **gomma**
  - **righello**
  - **un documento di identità o il libretto universitario**
- **TEMPO PER LO SVOLGIMENTO: 2 ORE**
- **METTERE SU OGNI FOGLIO NOME E COGNOME, ANCHE SUL TESTO, SUI FOGLI DI BRUTTA, SULLA CARTA LOGARITMICA (su cui è possibile scrivere a matita)**

SOLUZIONE

1)

$$G_p(s) = \frac{20(1+s)}{s(1+0.25s)\left(1+\frac{2\cdot 0.7}{200}s+\frac{s^2}{200^2}\right)}$$

2)

Il sistema $G_p(s)$ ha 4 poli:

$\lambda_0 = 0$ rad/s

$\lambda_1 = -1/T_{d1} = -4$ rad/s

$\lambda_{2,3} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = (-140 \pm 142j)$ rad/s

Il sistema $G_p(s)$ ha 1 zero:

$\mu_1 = -1/T_{n1} = -1$ rad/s

3) Il sistema $G_p(s)$ è al limite di stabilità in ciclo aperto perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa, tranne uno che ha parte reale nulla.

4) e 5)
[Fig. 1, curve nere]

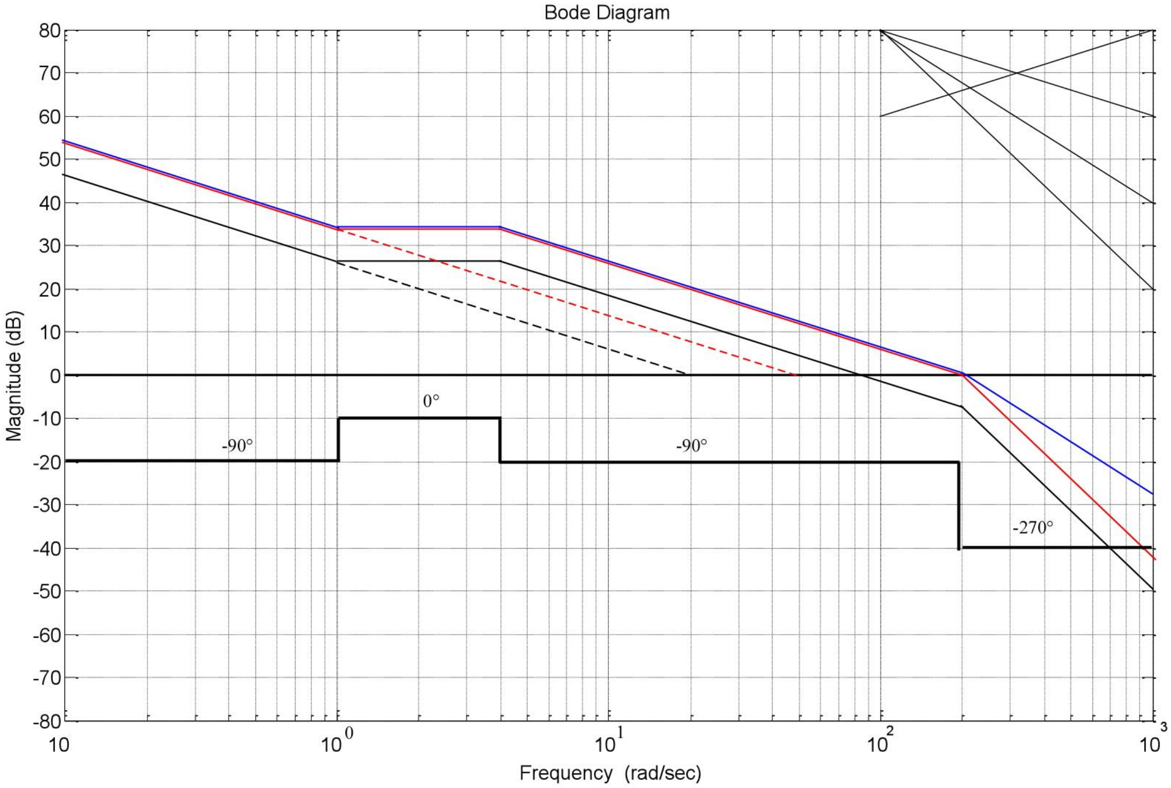


Fig. 1

6)

$$Y(s) = G_p(s)U(s)$$

risposta a gradino unitario

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{20(1+s)}{s(1+0.25s)\left(1+\frac{2\cdot 0.7}{200}s+\frac{s^2}{200^2}\right)}\frac{1}{s} = \infty$$

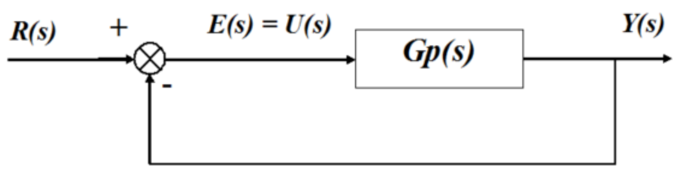
risposta a rampa unitaria

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{20(1+s)}{s(1+0.25s)\left(1+\frac{2\cdot 0.7}{200}s+\frac{s^2}{200^2}\right)}\frac{1}{s^2} = \infty$$

(In generale, le risposte a gradino e a rampa di un sistema di tipo 1 in ciclo aperto tendono ad infinito).

7)

Schema del sistema con retroazione e rete di correzione unitarie ($G_c(s) = H(s) = 1$):



Dal diagramma asintotico dell'ampiezza si stima una frequenza di taglio ω_t di circa 80 rad/s. La banda passante del sistema in ciclo chiuso va da 0 rad/s ad ω_t. (in generale, in ciclo chiuso la banda passante si considera arrivare fino ad ω_t).

Calcolo del margine di fase MF:

MF = 180° + φ (ω_t) =

= 180° - 90°- arctan ($\omega_t \cdot T_{d1}$) - arctan ($2\zeta\omega_n\, \omega_t/(\omega_n^2 - \omega_t^2)$) + arctan ($\omega_t \cdot T_{n1}$) =

= 180° - 90° - arctan (80 · 0.25) - arctan ($2\cdot 0.7\cdot 80\cdot 200/(200^2 - 80^2)$) + arctan (80 · 1) =

= 180° - 90° - 87.14° - 33.69° + 89.29° = 58.46°

[nota: riportare sempre nello scritto tutti i calcoli eseguiti per esteso; controllare che i vari contributi, soprattutto quello del termine di secondo grado, siano sensati rispetto alla collocazione di poli/zeri]

Secondo il criterio di Bode, se sono verificate due condizioni preliminari:

- la FTCA non è instabile (ok, è al limite di stabilità)
- la FTCA interseca l'asse a 0 dB una sola volta (ok)

allora condizione sufficiente per la stabilità della FTCC è che il margine di fase MF ed il margine di guadagno MG siano positivi (MF ed MG hanno sempre segno concorde). In questo caso le condizioni preliminari sono verificate, ed MF > 0; pertanto il sistema è stabile in ciclo chiuso anche senza rete di correzione.

Essendo il sistema di tipo 1:

- l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
- l'errore a regime per ingresso a rampa è $1/k_v = 1/20 = 5\%$

[svolgere le dimostrazioni col teorema del valore finale riportate nelle dispense]

8)

Il sistema è già di tipo 1, quindi ha errore nullo a gradino, non è necessario cambiarne il tipo aggiungendo una rete di correzione con integratore (polo nullo). Bisogna portare la ω_t a circa 200 rad/s, il che può essere fatto con una semplice rete proporzionale con guadagno $G'_c(s) = 50/20$, che ovviamente porta il k_v a 50 [vd. l'andamento di Fig. 1, curva rossa].

Ma bisogna verificare MF; con la rete proporzionale (il guadagno non influisce sulla fase) si ottiene MF'= 0.86°, insufficiente [svolgere i calcoli per esteso; nota: il contributo del secondo ordine è evidentemente -90° in corrispondenza della pulsazione naturale].

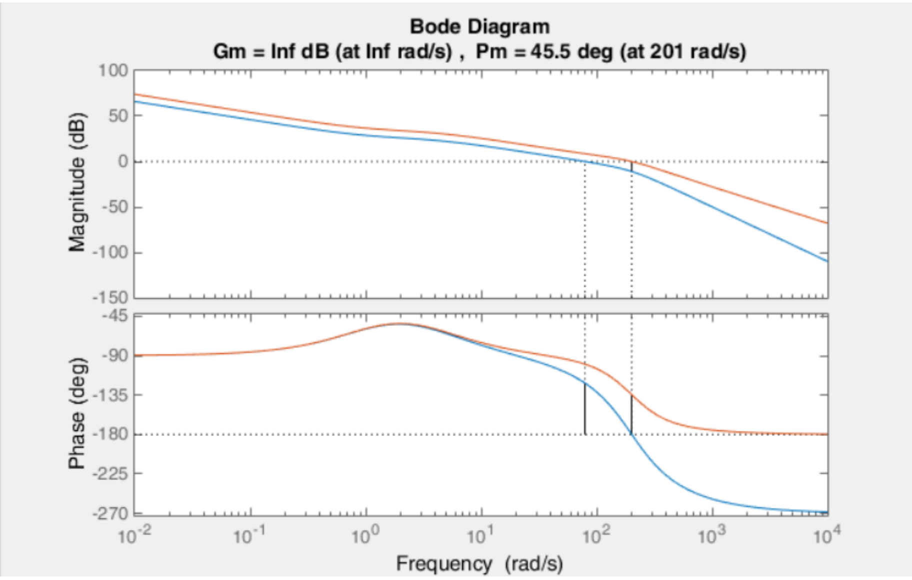
Bisogna aggiungere uno zero di costante di tempo incognita T_n, che possiamo calcolare imponendo MF; oppure possiamo semplicemente decidere di aggiungere uno zero in 200 rad/s, per aggiungere 45° alla fase e quindi a MF per soddisfare le specifiche. MF diventa ovviamente 45.86° [verificare per completezza]. La rete di correzione è quindi:

$$G_c(s) = \frac{50}{20}\left(1 + \frac{s}{200}\right)$$

che corrisponde alla curva blu di Fig. 1.

Nota: il taglio avviene in corrispondenza della pulsazione naturale del secondo ordine, ma lo ζ è abbastanza alto, il che garantisce che non ci sia picco, e quindi tripla intersezione con l'asse a 0 dB; in generale, sarebbe da evitare il taglio in vicinanza di un picco.

[verifica con Matlab:



la FTCA rossa è quella con rete di correzione, quella blu è la originale]

9) [vedi dispense, seconda pagina dal titolo “*Funzione di trasferta G(s)*”]

10) [vedi dispense]

11) [vedi dispense]