Dinamica e controllo dei sistemi meccanici

appello 14 gennaio 2014

Rispondere alle seguenti domande (RIPORTARE IN EVIDENZA I NUMERI DI DOMANDA)

1) si consideri un sistema di tipo 1, con guadagno $k_v = 7$, senza zeri, con un polo reale corrispondente ad una costante di tempo $T_1 = 0.01$s e due poli complessi coniugati caratterizzati da $\omega_n = 300$ rad/s e $\zeta = 0.7$; si scriva la corrispondente funzione di trasferta $G_p(s)$
2) quali sono i poli del sistema?
3) il sistema in ciclo aperto è stabile, instabile o al limite di stabilità? perché?
4) si tracci il diagramma di Bode dell'ampiezza sulla carta logaritmica fornita
5) descrivere l'andamento asintotico della fase di $G_p(s)$
6) si consideri il comportamento di $G_p(s)$ **in ciclo aperto** con ingresso a gradino unitario: quale sarà il valore a regime dell'uscita? (usare il teorema del valore finale)
7) si consideri il comportamento **in ciclo chiuso** di $G_p(s)$ con rete di correzione e con retroazione unitarie, ovvero con $G_c(s) = H(s) = 1$ (**disegnare lo schema**); si discutano:
   - la frequenza di taglio
   - il margine di fase MF *(SUGGERIMENTO: stimare la frequenza di taglio dal diagramma asintotico dell'ampiezza e poi calcolare analiticamente la fase a tale frequenza)*
   - la stabilità (citare il criterio di Bode con le necessarie ipotesi)
   - l'errore a regime per ingresso a gradino e per ingresso a rampa
8) si individui una rete di correzione $G_c(s)$ tale da ottenere in ciclo chiuso:
   - una frequenza di taglio di circa 100 rad/s
   - un margine di fase maggiore di 60°
   - un errore a regime per ingresso a gradino nullo
9) si tracci qualitativamente il diagramma di Bode della funzione di trasferta in ciclo chiuso, motivando l'andamento sopra e sotto la pulsazione di taglio della FTCA
10) si dimostri che per un sistema in ciclo chiuso con F.T. in catena diretta $G(s)$ e F.T. in catena di retroazione $H(s)$ la F.T. tra l'ingresso $R(s)$ e l'errore $E(s)$ è:
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$
11) si discutano le caratteristiche delle principali tipologie di controllori per automazione industriale: PLC stand-alone, PLC modulari, sistemi per controllo assi

- **OGNI STUDENTE DEVE AVERE SOLO:**
  - **calcolatrice (vietato portare con sé cellulari, PC, tablet, smartphone e similari)**
  - **penna**
  - **matita**
  - **gomma**
  - **righello**
  - **un documento di identità o il libretto universitario**
- **TEMPO PER LO SVOLGIMENTO: 2 ORE**
- **METTERE SU OGNI FOGLIO NOME E COGNOME, ANCHE SUL TESTO, SUI FOGLI DI BRUTTA, SULLA CARTA LOGARITMICA (su cui è possibile scrivere a matita)**

SOLUZIONE

1)

$$G_p(s) = \frac{7}{s(1+0.01s)\left(1+\frac{2\cdot 0.7}{300}s+\frac{s^2}{300^2}\right)}$$

2)

Il sistema $G_p(s)$ ha 4 poli:

$\lambda_0 = 0$ rad/s

$\lambda_1 = -1/T_1 = -100$ rad/s

$\lambda_{2,3} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} = (-210 \pm 214{,}2j)$ rad/s

3) Il sistema $G_p(s)$ è al limite di stabilità in ciclo aperto perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa, tranne uno che ha parte reale nulla.

4) e 5)
[Fig. 1, curva nera dell'ampiezza;
la fase non è disegnata, comunque ha tre asintoti orizzontali a -90°, -180°, -360°]

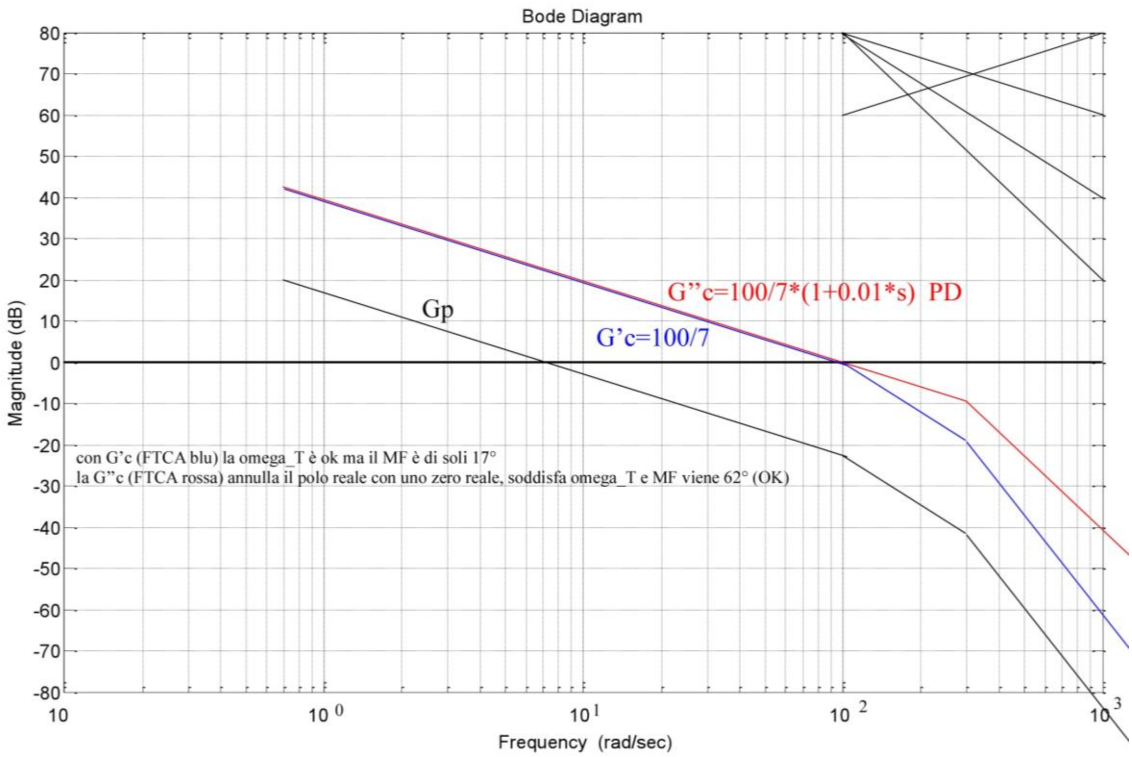


Fig. 1

6)

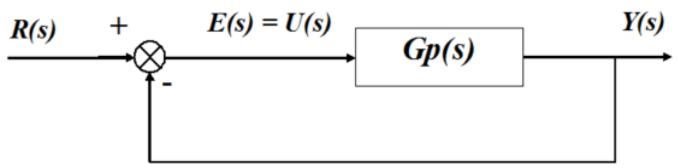
$$Y(s) = G_p(s)U(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{7}{s(1+0.01s)\left(1+\frac{1.4}{300}s+\frac{s^2}{300^2}\right)} \frac{1}{s} = \infty$$

(In generale, la risposta a gradino unitario di un sistema di tipo 1 in ciclo aperto tende ad infinito).

7)

Schema del sistema con retroazione e rete di correzione unitarie ($G_c(s)$ = $H(s)$ = 1):



Dal diagramma asintotico dell'ampiezza si stima una frequenza di taglio ω_t di circa 7 rad/s (l'approssimazione è ottima perché le pulsazioni di spigolo sono distanti dalla ω_t).

La banda passante del sistema va da 0 rad/s ad ω_t. (in generale, in ciclo chiuso la banda passante si considera arrivare fino ad ω_t).

Calcolo del margine di fase MF:

MF = 180° + φ(ω_t) =

= 180° - 90°- arctan ($\omega_t \cdot T_1$) - arctan ($2\zeta\omega_n\, \omega_t/(\omega_n^2 - \omega_t^2)$) =

= 180° - 90° - arctan (7 · 0.01) - arctan ($2\cdot0.7\cdot300\cdot7/(300^2 - 7^2)$) =

= 180° - 90° - 4.00° - 1.87° = 84.12°

[nota: riportare sempre nello scritto tutti i calcoli eseguiti per esteso; controllare che i vari contributi, soprattutto quello del termine di secondo grado, siano sensati rispetto alla collocazione di poli/zeri]

Secondo il criterio di Bode, se sono verificate due condizioni preliminari:

- la FTCA non è instabile (ok, è al limite di stabilità)
- la FTCA interseca l'asse a 0 dB una sola volta (ok)

allora condizione sufficiente per la stabilità della FTCC è che il margine di fase MF ed il margine di guadagno MG siano positivi (MF ed MG hanno sempre segno concorde). In questo caso le condizioni preliminari sono verificate, ed MF > 0; pertanto il sistema è stabile in ciclo chiuso anche senza rete di correzione.

Essendo il sistema di tipo 1:

- l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
- l'errore a regime per ingresso a rampa è $1/k_v$ = 1/7 = 14.3%

[svolgere le dimostrazioni col teorema del valore finale riportate nelle dispense]

8)

Il sistema è già di tipo 1, quindi ha errore nullo a gradino, non è necessario cambiarne il tipo aggiungendo una rete di correzione con integratore (polo nullo). Bisogna portare la ω_t a circa 100 rad/s, il che può essere fatto con una semplice rete proporzionale con guadagno $G'_c(s)$ = 100/7 [si ottiene l'andamento di Fig. 1, curva blu].

(In realtà essendoci lo spigolo esattamente a 100 rad/s, c'è un abbassamento dell'andamento reale di circa 3 dB rispetto all'andamento asintotico, e per tagliare esattamente a 100 dovremmo alzare un po' di più il guadagno, a $100/7 \cdot 10^{3/20}$; tuttavia non cambia molto).

Ma bisogna verificare MF, usando una rete solo proporzionale che faccia tagliare a 100 rad/s; con la rete proporzionale (il guadagno preciso non influisce sulla fase) si ottiene MF'=17° [svolgere i calcoli per esteso], valore non sufficiente (MF deve essere > 60°).

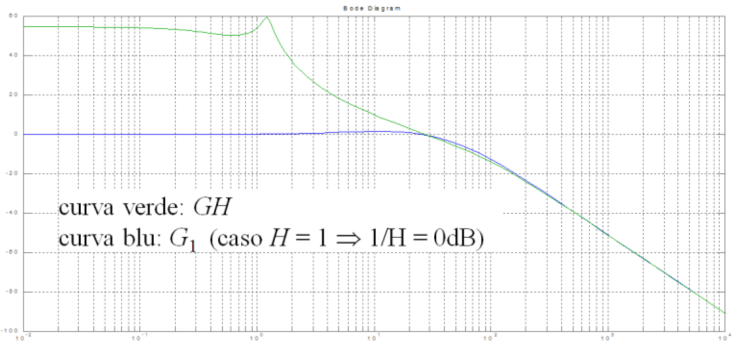
Esiste un'ampia varietà di reti di correzione che possono soddisfare le specifiche; comunque è necessario aumentare MF, ad esempio alzando la fase attorno a 100 rad/s introducendo uno zero (rete PD); un'altra possibilità sarebbe una rete ad anticipo di fase. Osserviamo che posizionando lo zero in 100 rad/s si annulla il polo corrispondente, e la fase in 100 rad/s aumenta esattamente di 45° (il contributo dello zero passa da 0° a 90°, e vale 45° nella pulsazione di spigolo); pertanto, ne consegue che la rete $G''_c(s) = 100/7(1+0.01s)$ [Fig. 1, curva rossa] permette di ottenere MF = 17°+45° = 62°, e pertanto soddisfa tutte le specifiche.

9)

In generale, se l'andamento della FTCA è >> 0 dB per basse frequenze e << 0 dB per alte frequenze, il grafico della FTCC con retroazione unitaria tende a corrispondere con l'asse a 0 dB per le frequenze minori di ω_t e con la FTCA per le frequenze maggiori di ω_t .

[riportare la semplice dimostrazione nelle dispense:

- in bassa frequenza $GH >> 1$ => $Y/R \approx 1/H$ (caso notevole: se $H = 1$, $Y/R = 1$)
- in alta frequenza $GH << 1$ => $Y/R \approx G$



pertanto basta tracciare un andamento che segua l'asse a 0 dB a sinistra di ω_t e la G a destra di ω_t]

10) [vedi dispense, semplici passaggi algebrici]

11) [vedi dispense reti logiche e PLC]