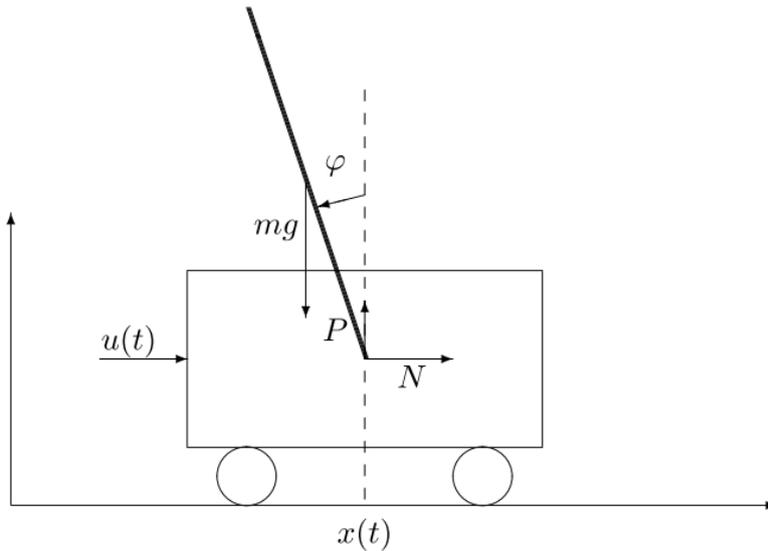


## CONTROLLO DEL PENDOLO INVERSO

### Modello meccanico non lineare

Un'asta di massa  $m$  è incernierata ad un carrello di massa  $M$ , il cui movimento è comandato da una forza  $u(t)$ . La posizione del centro di massa del carrellino al tempo  $t$  è  $x(t)$ . Il sistema meccanico complessivo è descritto nella seguente figura



Le equazioni del sistema sono quelle di bilanciamento delle componenti orizzontali e verticali delle forze agenti. Indichiamo rispettivamente con  $P(\cdot)$  e  $N(\cdot)$  la forza verticale (parallela alla verticale) e quella orizzontale (normale alla verticale) esercitate dal carrello sull'asta, con  $L$  la distanza del baricentro dell'asta dalla cerniera e con  $I$  il momento di inerzia dell'asta rispetto al baricentro. Sia inoltre  $g$  l'accelerazione di gravità.

Il moto del baricentro dell'asta è descritto dalle equazioni

$$N(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) \quad (1)$$

$$P(t) - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi(t)) \quad (2)$$

e il moto di rotazione relativo al baricentro da

$$LP(t) \sin \varphi(t) + LN(t) \cos \varphi(t) = I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}. \quad (3)$$

Il moto del carrello è descritto dalla equazione

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -N(t) + u(t) - b \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

dove si è tenuto conto della presenza di un attrito viscoso di coefficiente  $b$ . Sostituendo le espressioni di  $P(t)$  e  $N(t)$ , quali si ricavano dalle equazioni (1) e (2), in (3) e (4), si perviene alla coppia di equazioni:

$$L \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi(t)) + mg \right] \sin \varphi(t) + L \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) \right] \cos \varphi(t) = I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \quad (5)$$

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) + u(t) - b \frac{dx(t)}{dt}. \quad (6)$$

Assumendo  $\varphi(t)$  molto piccolo, così che valgano le approssimazioni

$$\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t), \quad \cos(\varphi(t)) \approx 1,$$

le (5) e (6) possono essere riscritte come segue:

$$(I + mL^2) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - Lmg \varphi(t) = Lm \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \quad (7)$$

$$(M + m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - mL \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} = u(t). \quad (8)$$

Se ora applichiamo la trasformata di Laplace a (7) e (8), troviamo

$$[(I + mL^2) s^2 - Lmg] \Phi(s) = Lms^2 X(s), \quad (9)$$

$$(M + m)s^2 X(s) - mLs^2 \Phi(s) + bsX(s) = U(s). \quad (10)$$

Dalla prima si ricava

$$X(s) = \frac{(I + mL^2) s^2 - Lmg}{Lms^2} \Phi(s)$$

che, sostituita nella seconda, porta a

$$[(M + m)s + b] s \left( \frac{(I + mL^2) s^2 - Lmg}{Lms^2} \Phi(s) \right) - mLs^2 \Phi(s) = U(s),$$

ovvero

$$\left( \frac{[(M + m)s + b][(I + mL^2) s^2 - Lmg]}{Lms} - mLs^2 \right) \Phi(s) = U(s).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} G(s) &:= \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{Lms}{[(M + m)s + b][(I + mL^2) s^2 - Lmg] - m^2 L^2 s^3} \\ &= \frac{Lms}{[(M + m)(I + mL^2) - m^2 L^2] s^3 + b(I + mL^2) s^2 - mgL(M + m)s - mgLb} \end{aligned}$$

## Esempio numerico

Consideriamo i seguenti valori numerici:

- $M = 0.5$  kg;
- $m = 0.2$  kg;
- $b = 0.1$  N/m/sec;
- $L = 0.3$  m;
- $g = 9.9$  m/s<sup>2</sup>;
- $I = 0.006$  kg·m<sup>2</sup>,

ed implementiamo la F.T.  $G(s)$  tramite il seguente script di Matlab:

```
clear;
close all;
s=tf('s');
M=0.5;      % kg
m=0.2;      % kg
b=0.1;      % Ns/m
L=0.3;      % m
g=9.81;     % m/s2
I=0.006;    % kg/m2
|
G=L*m*s/((M+m)*s+b)*((I+m*L^2)*s^2-L*m*g)-m^2*L^2*s^3);

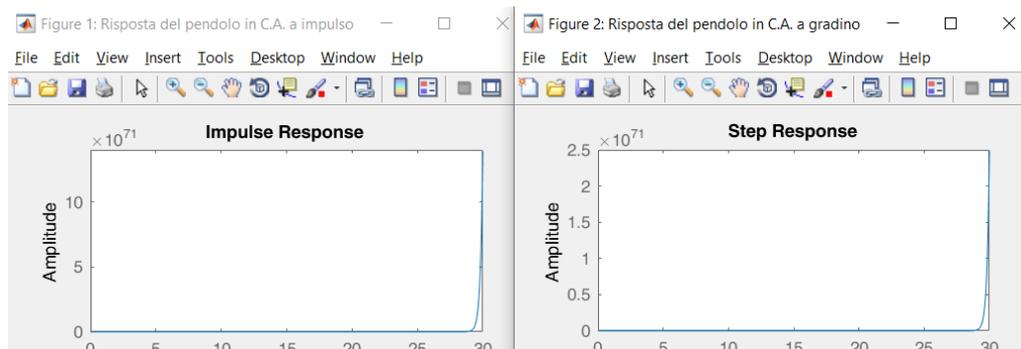
poliFTCA=pole(G); % NB: 1 polo reale positivo --> FTCA instabile
                % (criterio di Bode non applicabile)

t=0:0.01:30;
figure('Name','Risposta del pendolo in C.A. a impulso');
impz(G,t);
figure('Name','Risposta del pendolo in C.A. a gradino');
step(G,t);
```

Notiamo che il sistema in ciclo aperto è instabile, come intuitivo dallo schema meccanico, e come si rileva dai poli (uno è reale e positivo) e dalle risposte a impulso e a gradino, che divergono.

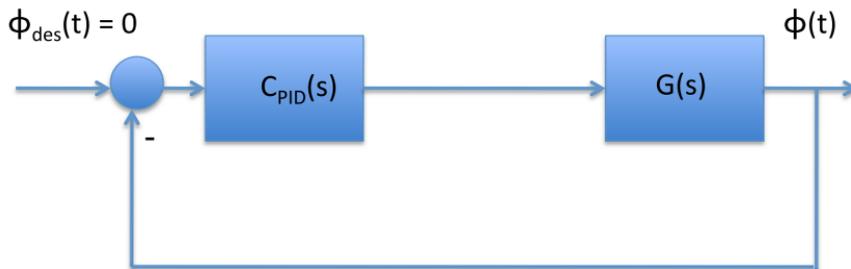
poliFTCA =

```
5.5680
-5.6069
-0.1428
```



## Sistema retroazionato con controllore PID

Proviamo ora a stabilizzare il sistema con una retroazione PID, che mantenga verticale l'asta.



$$C_{PID}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$$

Aggiungiamo le seguenti righe di codice allo script:

```
Kp=20;           % N/rad
Kd=10;           % Ns/rad
Ki=8;            % N/(rad*s)

Gpid=Kp+Kd*s+Ki/s;

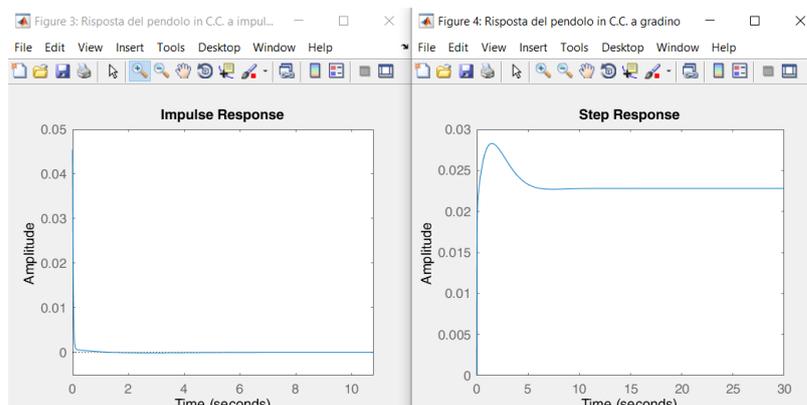
Gcd=Gpid*G;      % FT in catena diretta
G1=feedback(Gcd,1);
poliFTCC=pole(G1); % poli con parte reale negativa tranne uno nullo,
zeriFTCC=zero(G1); % ma è calcolato anche uno zero nullo che annulla
                    % il polo nullo, quindi FTCC stabile, di tipo 0
                    % perchè il polo nullo del controllore annulla
                    % lo zero nullo del sistema; infatti l'errore a
                    % gradino non è nullo

figure('Name','Risposta del pendolo in C.C. a impulso');
impulse(0.001*G1,t); % impulso di riferimento di ampiezza 0.001 m*s
figure('Name','Risposta del pendolo in C.C. a gradino');
step(0.02*G1,t);    % gradino di riferimento di ampiezza 0.02 m
```

Notiamo che i poli della FTCC sono tutti con parte reale negativa tranne uno nullo, ma Matlab calcola anche uno zero nullo (senza semplificare); quindi il sistema è stabile e di tipo 0 (infatti l'errore a gradino non è nullo). In altre parole, lo zero nullo del sistema ha compensato il polo nullo del PID, annullandone l'effetto integrale di eliminazione dell'errore. Il sistema in ciclo chiuso, comunque, è divenuto stabile.

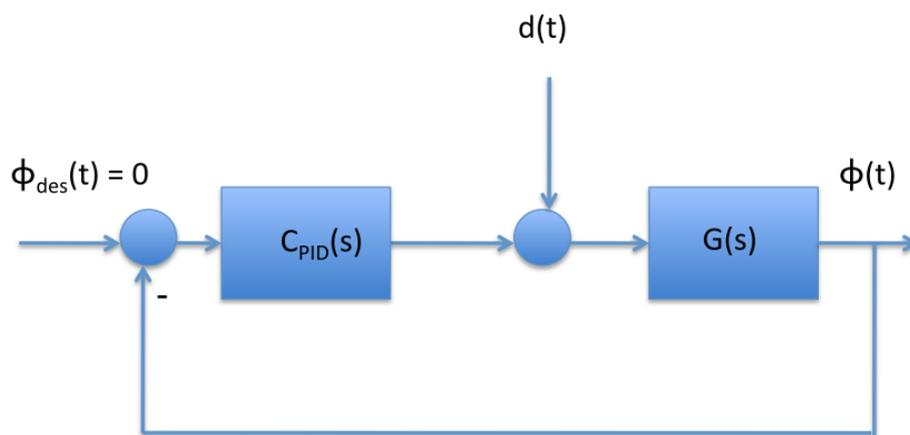
```
poliFTCC =
    0.0000 + 0.0000i
   -44.3052 + 0.0000i
   -0.6656 + 0.5264i
   -0.6656 - 0.5264i

zeriFTCC =
    0
   -1.4472
   -0.5528
```

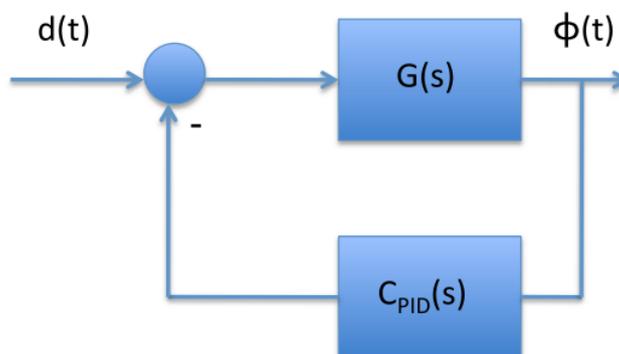


Si noti inoltre che il sistema non è stabile per ogni set di guadagni del PID (si provi ad esempio a imporre  $K_p = 1$ ).

Consideriamo ora una variazione al classico problema di controllo prima esaminato per il sistema carrello-pendolo inverso. Di norma l'obiettivo di regolazione di tale sistema è quello di far sì che  $\varphi(t)$  sia nullo, ovvero il pendolo sia in equilibrio verticale. In assenza di forze applicate sul sistema e con carrello fermo il pendolo può trovarsi in equilibrio verticale. Supponiamo ora che al precedente sistema, controllato con un controllore PID, venga applicato (a partire dall'istante  $t = 0$ ) un disturbo costante  $d(t)$  che si manifesta come una forza aggiuntiva rispetto alla forza generata dal controllore PID. Supponiamo inoltre, per semplicità, che le condizioni iniziali sia del controllore PID che del sistema carrello con pendolo inverso siano tutte nulle. Lo schema di controllo che abbiamo in mente è il seguente:



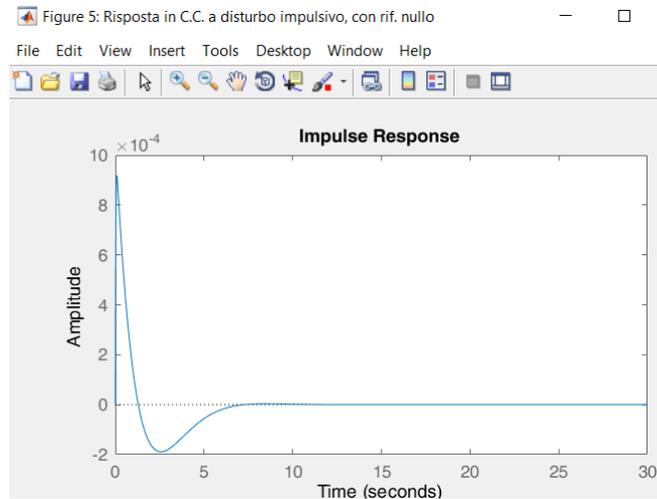
Tuttavia, in virtù del fatto che il segnale di riferimento è nullo, il precedente schema (a due ingressi,  $\varphi_{des}(t)$  e  $u(t)$ , ed un'uscita,  $\varphi(t)$ ) è del tutto equivalente al seguente schema ad un solo ingresso ed una sola uscita:



Del resto, i due schemi condividono la stessa FTCA, e pertanto la stessa stabilità. Si aggiungano le seguenti righe di codice allo script, per simulare la risposta a un disturbo impulsivo (non unitario):

```
Gdist=feedback(G,Gpid);
```

```
figure('Name','Risposta in C.C. a disturbo impulsivo, con rif. nullo');  
impulse(0.01*Gdist,t); % impulso di disturbo di ampiezza 0.01 N*s
```



Il sistema di controllo reagisce al disturbo, riportando l'asta in verticale. Si è pertanto verificato che la stabilità a variazioni nel segnale di riferimento corrisponde alla robustezza del sistema di controllo ad eventuali disturbi esterni. Nel caso del pendolo inverso, il funzionamento "normale" è appunto quello relativo a quest'ultima simulazione, in cui il sistema di controllo reagisce a piccoli disturbi esterni (spostamenti d'aria, vibrazioni del terreno, condizioni iniziali non nulle) mantenendo l'asta verticale.