Metodo del luogo delle radici

Metodo del luogo delle radici

- I metodi di analisi nel dominio della frequenza ed i criteri basati sui margini di stabilità sono molto utili per una prima valutazione delle caratteristiche dinamiche dei sistemi in ciclo chiuso.
- Tuttavia talvolta è utile la conoscenza dei poli del sistema in ciclo chiuso e dell'influenza che su di essi hanno le variazioni dei parametri a disposizione del progettista.
- Il metodo del luogo delle radici, o luogo di Evans, è un procedimento grafico per la costruzione delle curve descritte nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare di un parametro, che normalmente è la costante di guadagno di anello.
- Tale metodo risulta utile per una approfondita conoscenza del sistema in ciclo chiuso e consente di avere indicazioni sia sulla risposta in frequenza sia sulla risposta in transitorio.

Metodo del luogo delle radici

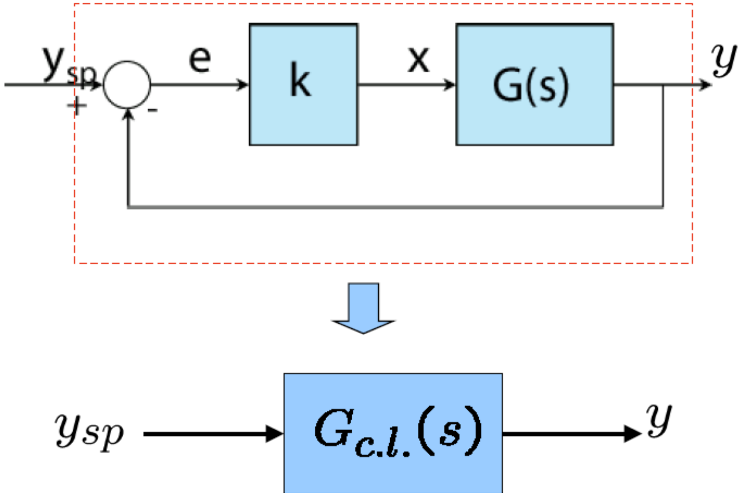
Sia G(s) la FTCA (H(s) = 1); pertanto l'equazione caratteristica dell'anello chiuso risulta:

$$1 + G(s) = 0$$

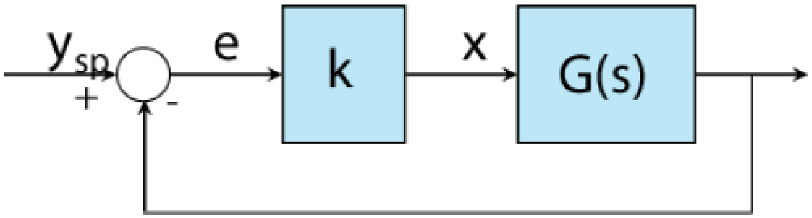
Se si applica un guadagno proporzionale k variabile, l'equazione caratteristica diventa:

$$1 + kG(s) = 0$$

Il metodo del luogo delle radici consiste solitamente nel graficare le radici di tale equazione caratteristica al variare di k. In teoria si potrebbe studiare il sistema in ciclo chiuso al variare un altro parametro del controllore. (**nota:** k è sempre > 0 nella teoria dei controlli, perché si scelgono i segni in modo che ad errore positivo corrisponda una azione positiva, altrimenti la retroazione non funzionerebbe).



Esempio

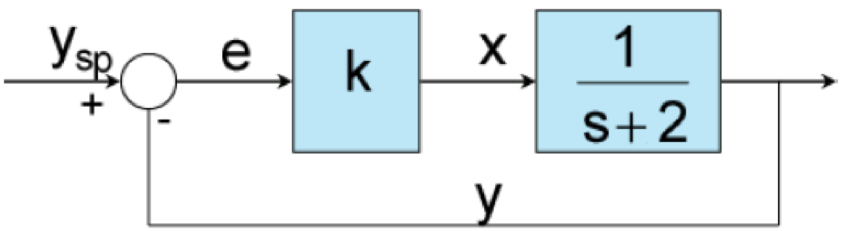


$$G_1 = \frac{kG}{1+kG}$$

Equazione caratteristica $\Rightarrow 1 + kG(s) = 0$

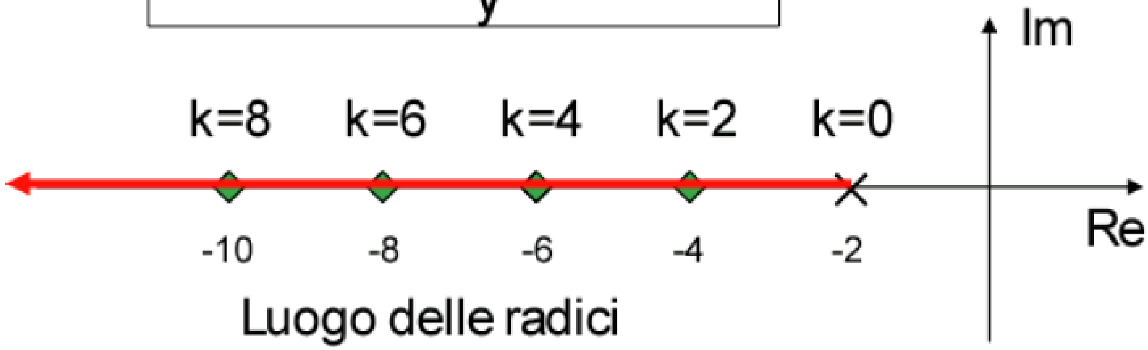
Le radici sono i poli del sistema in retroazione

Sistema del 1° ordine



$$G_1 = \frac{k}{s + \boxed{2 + k}}$$

Nuovo polo



polo FTCA: $\lambda_G = -2$

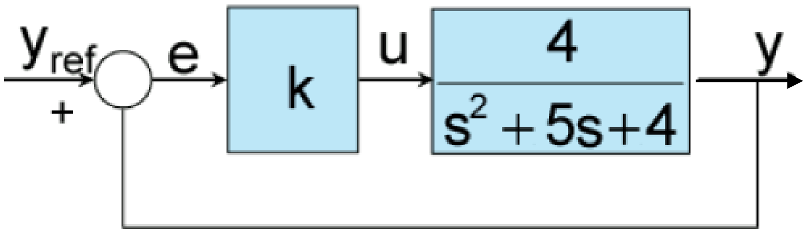
polo FTCC: $\lambda_{G_1} = -(2+k)$

conclusioni: FTCC stabile per ogni $k > 0$; il sistema in ciclo chiuso non ha mai comportamento oscillatorio perché il polo (unico) è sempre reale (e negativo)

verificarlo con Matlab, calcolando la G_1 e usando il comando *step* con diversi valori di k.

Esempio

Sistema del 2° ordine



$$G_1 = \frac{kG}{1+kG}$$

$$1+kG = 1+\frac{4k}{s^2+5s+4} = \frac{s^2+5s+4+4k}{s^2+5s+4}$$

$$s^2+5s+4+4k = s^2+5s+4(1+k)$$

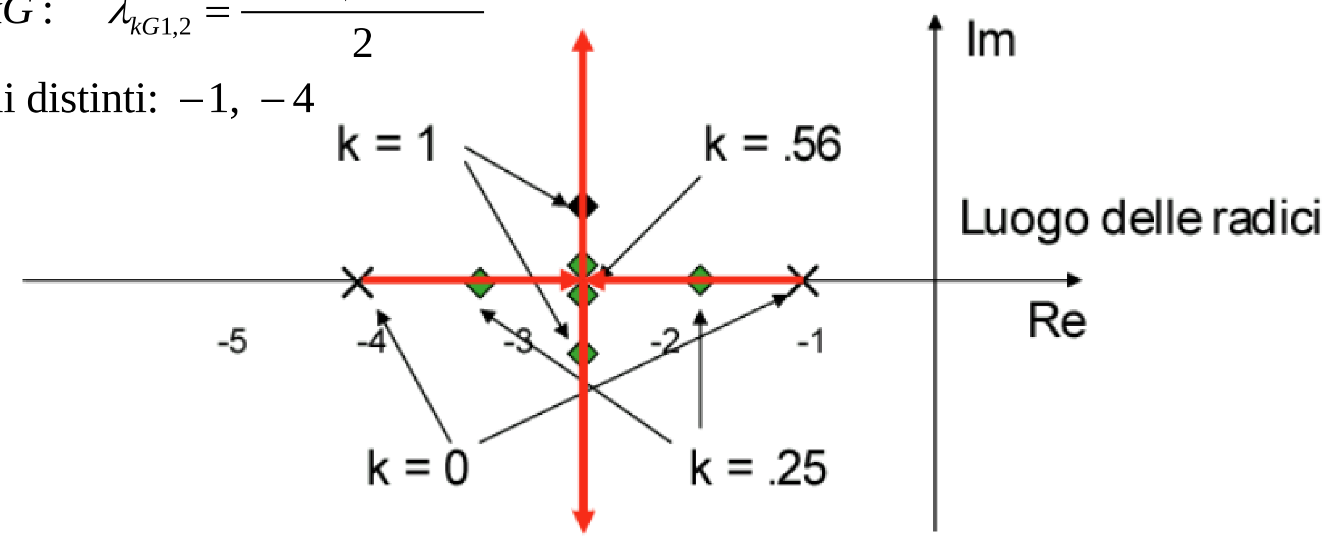
$$\text{poli di } G_1: \quad \lambda_{G_1 1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16(1+k)}}{2}$$

$$G_1 \text{ ha poli reali se } 25 > 16(1+k) \Rightarrow k < \frac{9}{16} = 0.5625$$

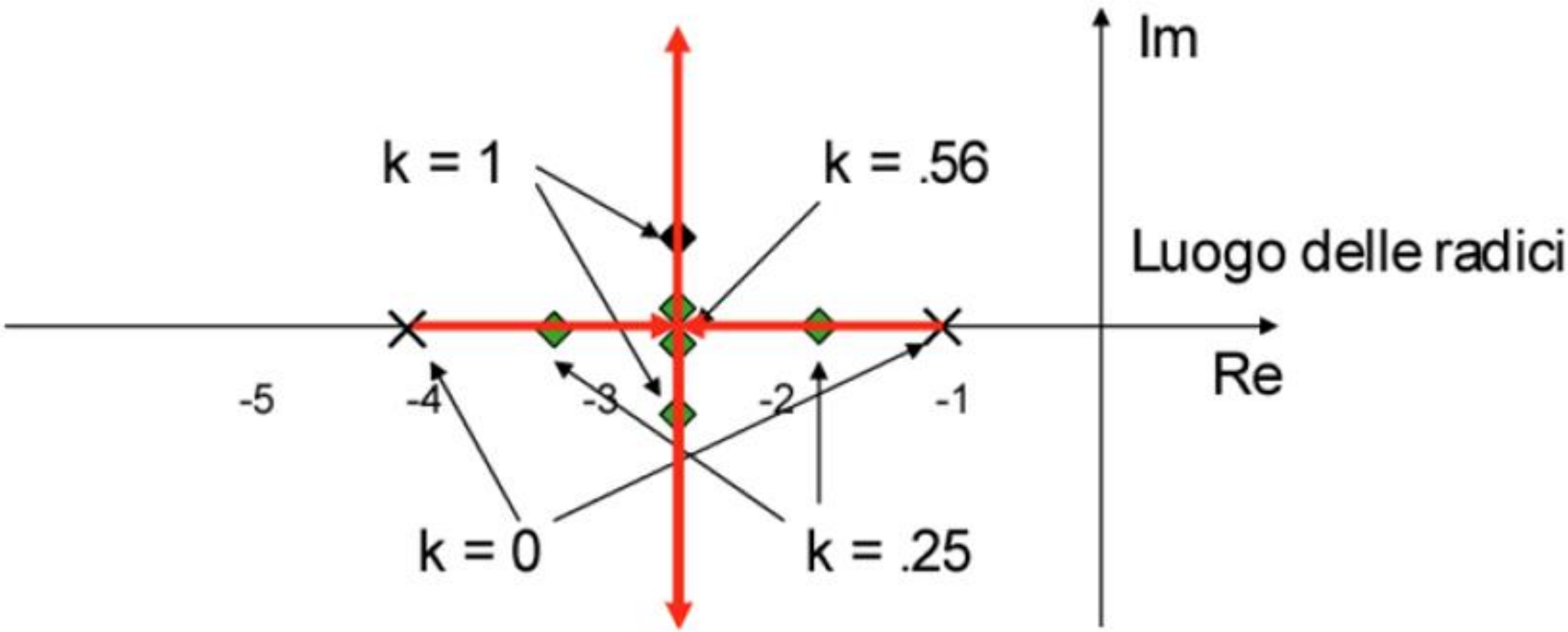
$$\text{FTCA: } kG = \frac{4k}{s^2+5s+4}$$

$$\text{poli di } kG: \quad \lambda_{kG1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

poli reali distinti: $-1, \ -4$



Esempio

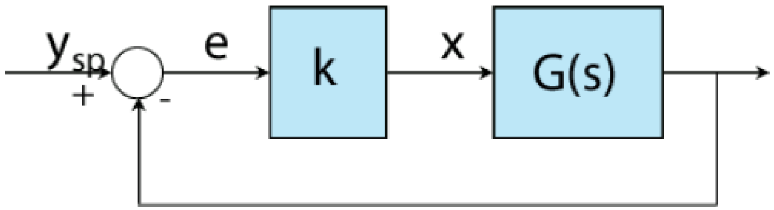


conclusioni sulla FTCC:

- stabile per ogni $k > 0$ (i poli della G_1 hanno sempre parte reale < 0)
- per $k < 9/16$ comportamento non oscillatorio (2 poli reali, sistema sovrasmorzato, $\zeta > 1$)
- per $k > 9/16$ comportamento oscillatorio (2 poli complessi coniugati, sistema sottosmorzato, $\zeta < 1$)
- per $k = 9/16$ smorzamento critico (2 poli reali coincidenti, $\zeta = 1$)

Verificarlo nel dominio del tempo con Matlab, calcolando la G_1 e usando il comando *step* con diversi valori di k.

Proprietà dei poli in ciclo chiuso



$$G_1(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$$

Poli

$$1 + kG(s) = 0$$

- I poli del sistema in retroazione variano al variare del guadagno k da 0 a ∞.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad 1 + kG(s) \text{ ha radici in } D(s) + kN(s) = 0$$

$$k = 0 \Rightarrow D(s) = 0; \text{ i poli della } G_1(s) \text{ sono i poli della } G(s)$$

$$k = \infty \Rightarrow N(s) = 0; \text{ i poli della } G_1(s) \text{ sono negli zeri della } G(s) \text{ o all'}\infty$$

Metodo del luogo delle radici: proprietà

Il luogo delle radici presenta alcune interessanti proprietà:

- **il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della FTCA**; questi si intersecano nelle radici multiple (una radice multipla di ordine *n* corrisponde a un punto in comune fra *n* rami del luogo delle radici)
- **ogni ramo parte (k = 0) da un polo di G(s) e termina ($k = \infty$) in uno zero di G(s) o in un punto all'infinito**
- **il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale**: la proprietà discende dal fatto che le radici complesse di una equazione polinomiale a coefficienti reali sono coniugate

Il luogo delle radici può essere graficato in Matlab tramite il comando `rlocus`.

Esempi: sistemi del primo ordine

Zero all'infinito

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

polo FTCA: $\lambda_G = -1$

$D(s) + kN(s) = s + 1 + k = 0$

$\Rightarrow$ polo FTCC: $\lambda_{G_1} = -(1+k)$

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

polo FTCA: $\lambda_G = -1$

$D(s) + kN(s) = s + 1 + k(s+2) = 0 \Rightarrow s(1+k) = -(1+2k)$

$\Rightarrow$ polo FTCC: $\lambda_{G_1} = -\dfrac{1+2k}{1+k}$

si vede che: $\lambda_{G_1} \to -1$ (polo FTCA) per $k \to 0$

$\lambda_{G_1} \to -2$ (zero FTCA) per $k \to \infty$

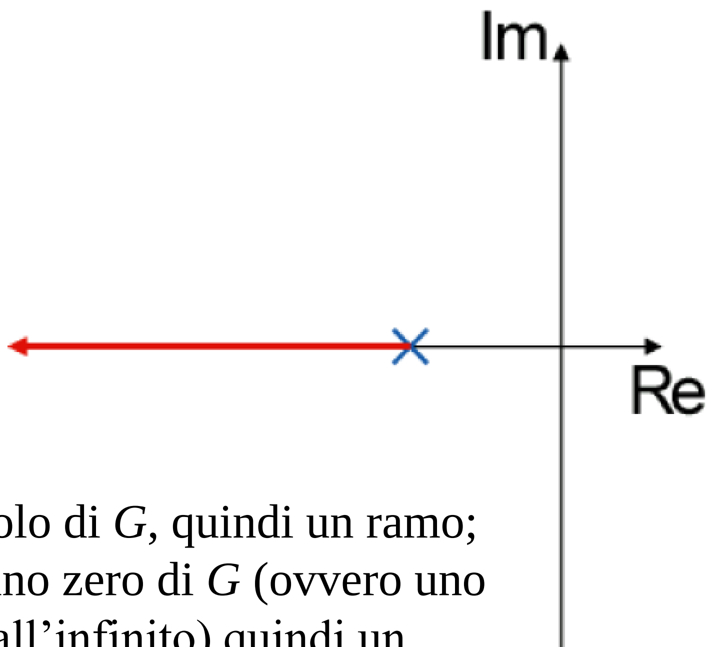
si possono pertanto disegnare i luoghi delle radici della pagina seguente, calcolando per verifica alcuni punti per diversi valori di k

Esempi: sistemi del primo ordine

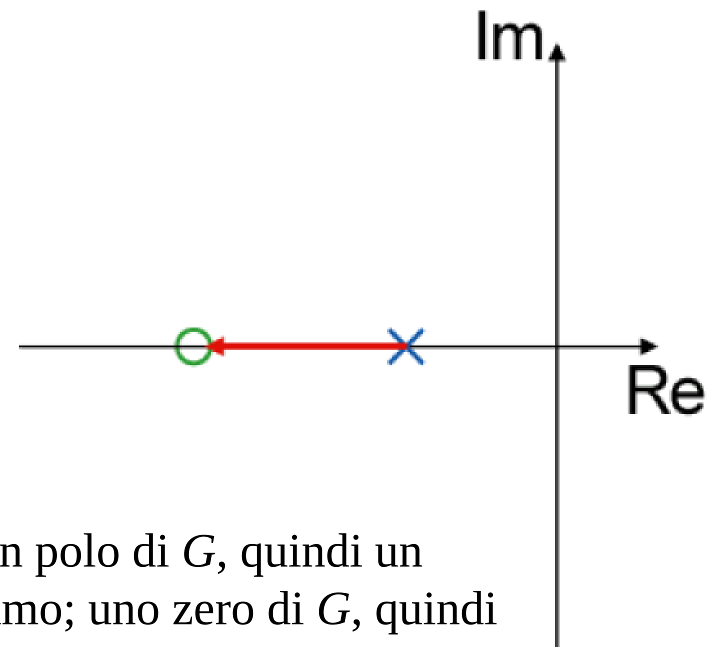
Zero all’infinito

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$



Un polo di G, quindi un ramo; nessuno zero di G (ovvero uno zero all’infinito) quindi un asintoto all’infinito

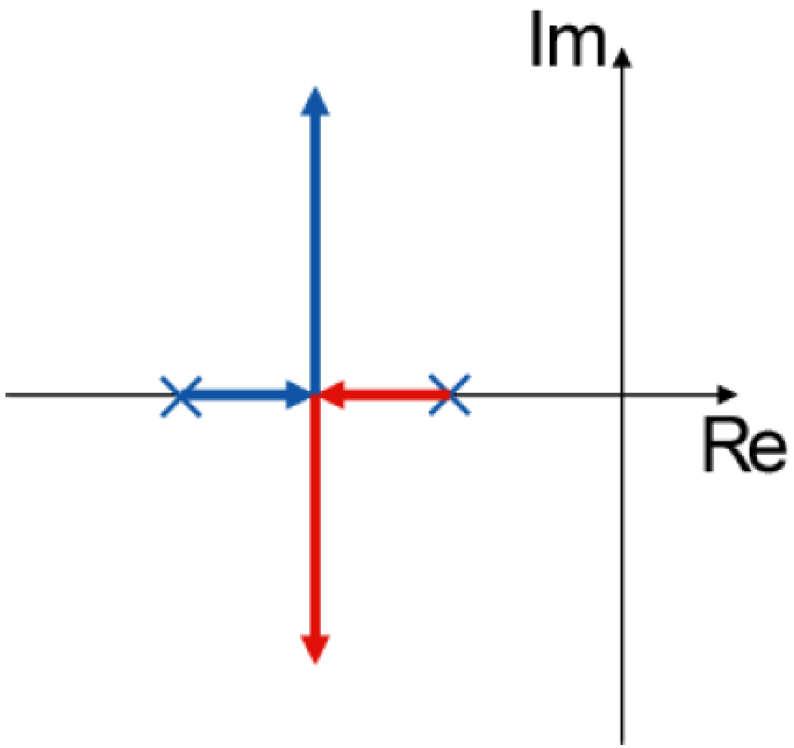


Un polo di G, quindi un ramo; uno zero di G, quindi nessun asintoto all’infinito

conclusioni: per entrambi i sistemi FTCC stabile per ogni $k > 0$; il sistema in ciclo chiuso non ha mai comportamento oscillatorio perché il polo (unico) è sempre reale (e negativo)

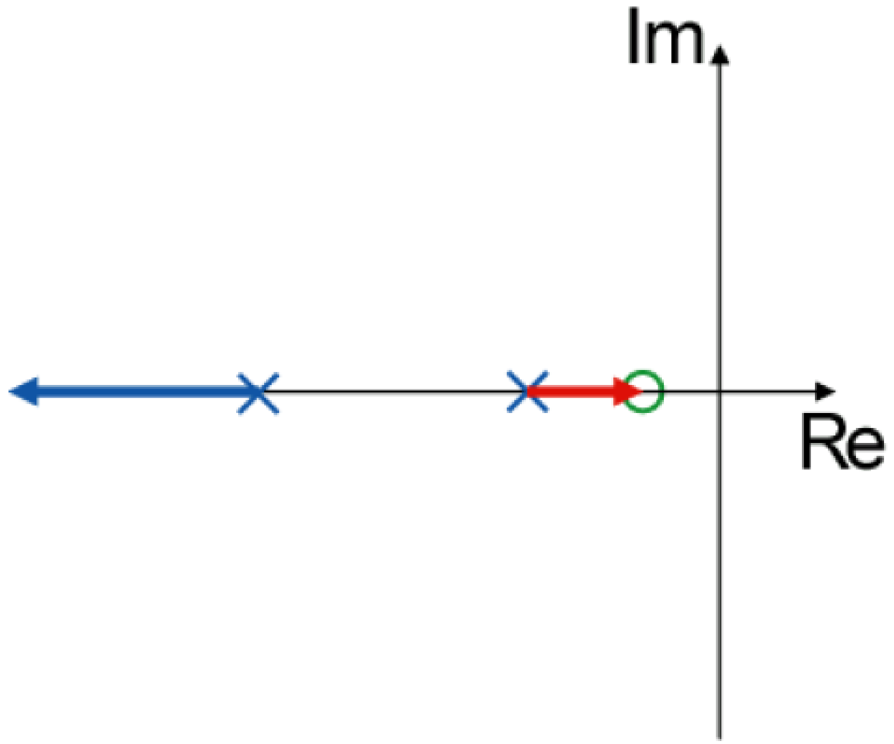
Esempi: sistemi del secondo ordine

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$



2 poli di G, quindi 2 rami; nessuno zero, quindi 2 asintoti all'infinito

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 7s + 10}$$



2 poli di G, quindi 2 rami; 1 zero, quindi 1 asintoto all'infinito

Esempi: sistemi del secondo ordine

Svolgiamo qualche calcolo per il sistema a sinistra nella pagina precedente.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$

poli FTCA: $\lambda_G = -5, -2$

$D(s) + kN(s) = s^2 + 7s + (10 + k) = 0$

$\Rightarrow$ poli FTCC: $\lambda_{G_1} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{9 - 4k}}{2}$

- per k < 9/4, i poli della FTCC sono reali e negativi; il sistema in ciclo chiuso è sovrasmorzato (ζ>1), il comportamento non è oscillatorio
- per k = 9/4, i poli della FTCC sono reali, negativi e coincidenti; il sistema in ciclo chiuso ha smorzamento critico (ζ=1)
- per k > 9/4, i poli della FTCC sono complessi coniugati con parte reale negativa (sempre -3.5 al variare di k); il sistema in ciclo chiuso è sottosmorzato (ζ<1), con comportamento oscillatorio

Per ogni k, comunque, il sistema in ciclo chiuso è stabile, infatti i rami del luogo delle radici sono interamente nel semipiano sinistro.

Il luogo delle radici si può disegnare a mano per punti calcolando i poli della FTCC per alcuni valori di k, ad esempio 0 (valore per cui coincidono con i poli della FTCA), 1, 9/4 (valore per cui i poli sono coincidenti), 4, 10. Con Matlab, si può verificare con il comando *rlocus*; inoltre calcolando la FTCC ed usando il comando *step* si può osservare nel dominio del tempo il comportamento del sistema al variare di k. Si può verificare che il sistema ha comunque bisogno di un k alto per ottenere una precisione accettabile (ad esempio k_{min}= *490* per un errore del 2%); il sistema in ciclo chiuso è quindi di fatto sempre oscillatorio.

Esempi: sistemi del secondo ordine

Vediamo ora il secondo sistema, con uno zero aggiuntivo:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+10}$$

poli FTCA: $\lambda_G = -5, -2$

$$D(s) + kN(s) = s^2 + (7+k)s + (10+k) = 0$$

$$\Rightarrow \text{poli FTCC: } \lambda_{G_1} = \frac{-(7+k) \pm \sqrt{k^2+10k+9}}{2}$$

Per ogni k i poli sono sempre sono reali e < 0, quindi il sistema in ciclo chiuso è stabile e sovrasmorzato (non ha comportamento oscillatorio).

Il luogo delle radici si può disegnare a mano calcolando i poli della FTCC per alcuni valori di *k*, ed osservando che:

- i 2 rami devono partire dai poli della FTCA
- uno dei rami deve tendere allo zero della FTCA
- i due poli sono sempre distinti ($\Delta>0$), quindi i due rami non si possono intersecare

Ne consegue l'andamento disegnato in figura.

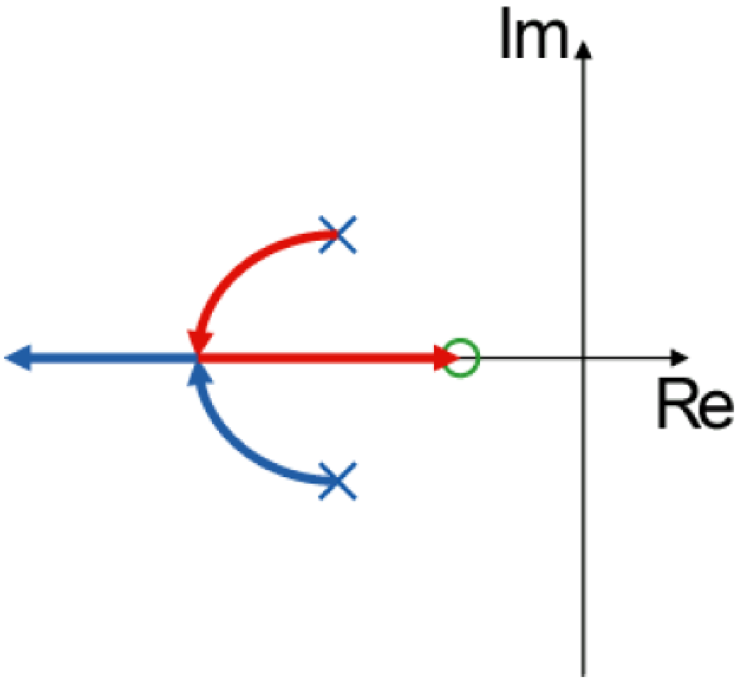
NOTA: l'introduzione dello zero ha spostato il sistema verso la stabilità: il sistema non è mai oscillatorio. Questo si può osservare anche col diagramma di Bode, in quanto uno zero rende la fase meno negativa, e pertanto il MF aumenta, il che indica maggiore stabilità.

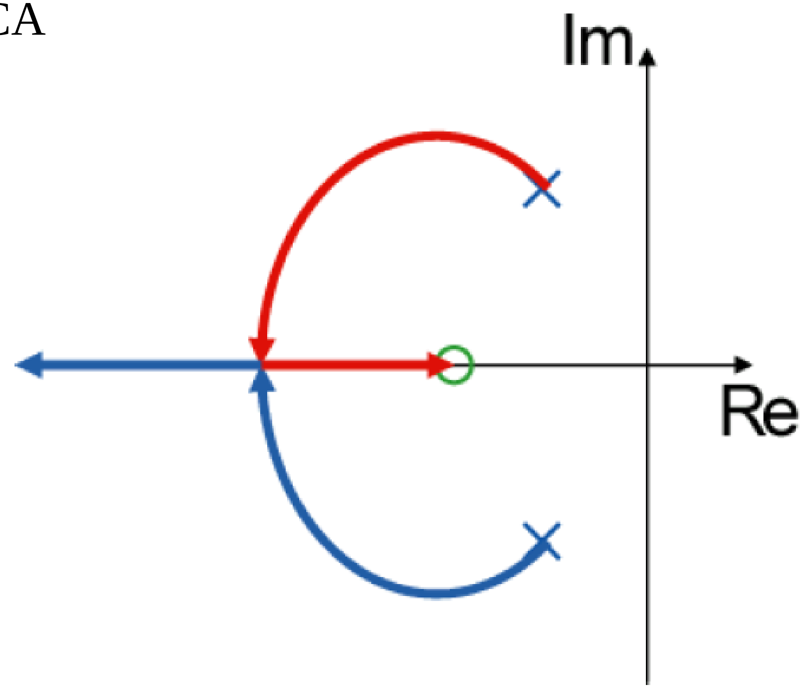
Esempi: sistemi del secondo ordine

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+10s+41}$$

$\zeta = 0.78$,
due poli
complessi
coniugati della
FTCA

$$G(s) = \frac{s+8}{s^2+10s+41}$$





Per entrambe le *G*: 2 poli di *G*, quindi 2 rami; 1 zero, quindi 1 asintoto all'infinito

Esempi: sistemi del secondo ordine

Svolgiamo qualche calcolo per il sistema a sinistra nella pagina precedente (quello a destra è simile).

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+10s+41}$$

poli FTCA: $\lambda_G = -5 \pm 4j$

$$D(s) + kN(s) = s^2 + (10+k)s + (41+3k) = 0$$

$$\Rightarrow \text{poli FTCC: } \lambda_{G_1} = \frac{-(10+k) \pm \sqrt{k^2+8k-64}}{2}$$

Il Δ non è > 0 per ogni k; si calcola facilmente che il Δ è > 0 per valori esterni a -12.94 e +4.94, ma k è sempre > 0, pertanto:

- per $k < 4.94$, i poli della FTCC sono complessi coniugati con parte reale negativa; il sistema in ciclo chiuso è sottosmorzato (ζ<1), con comportamento oscillatorio
- per $k = 4.94$, i poli della FTCC sono reali, negativi e coincidenti; il sistema in ciclo chiuso ha smorzamento critico (ζ=1)
- per $k > 4.94$, i poli della FTCC sono reali e negativi; il sistema in ciclo chiuso è sovrasmorzato (ζ>1), il comportamento non è oscillatorio

Per ogni k, comunque, il sistema in ciclo chiuso è stabile, infatti i rami del luogo delle radici sono interamente nel semipiano sinistro.

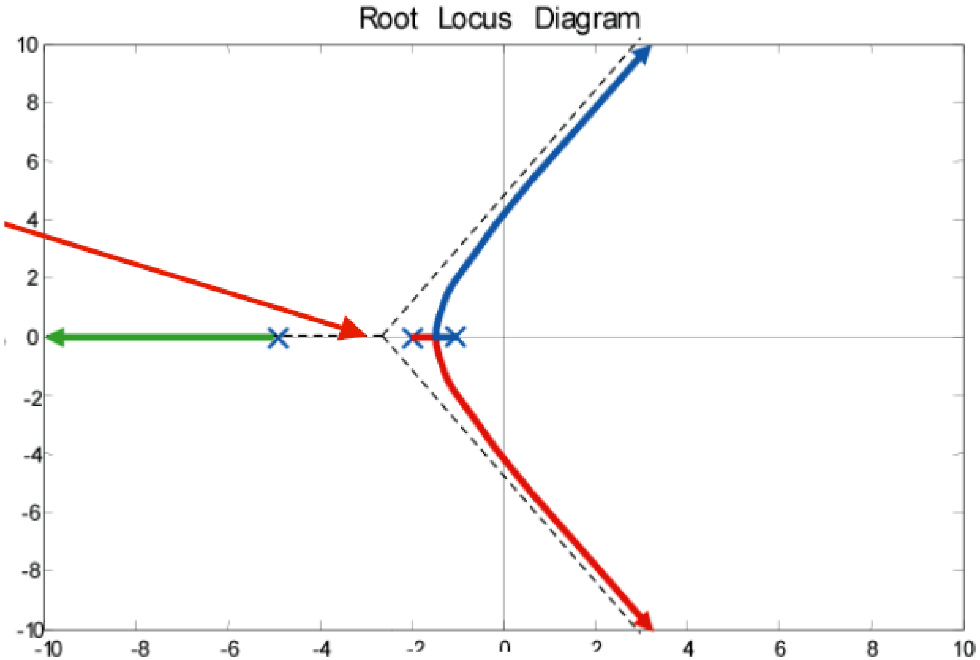
Il luogo delle radici si può disegnare a mano per punti calcolando i poli della FTCC per alcuni valori di k, ad esempio 0 (valore per cui coincidono con i poli della FTCA), 2, 4, 4.94 (valore per cui i poli sono coincidenti), 6, 10.

Con Matlab, si può verificare con il comando *rlocus*; inoltre calcolando la FTCC ed usando il comando *step* si può osservare nel dominio del tempo il comportamento del sistema al variare di k.

Esempi: sistemi del terzo ordine

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

asintoti: si intersecano in un unico punto



3 poli di *G*, quindi 3 rami; nessuno zero, quindi 3 asintoti all'infinito

Per un sistema del terzo ordine non si riescono a calcolare a mano agevolmente i poli della FTCC, quindi possiamo solo disegnare il luogo delle radici con Matlab.
Si può dire che:

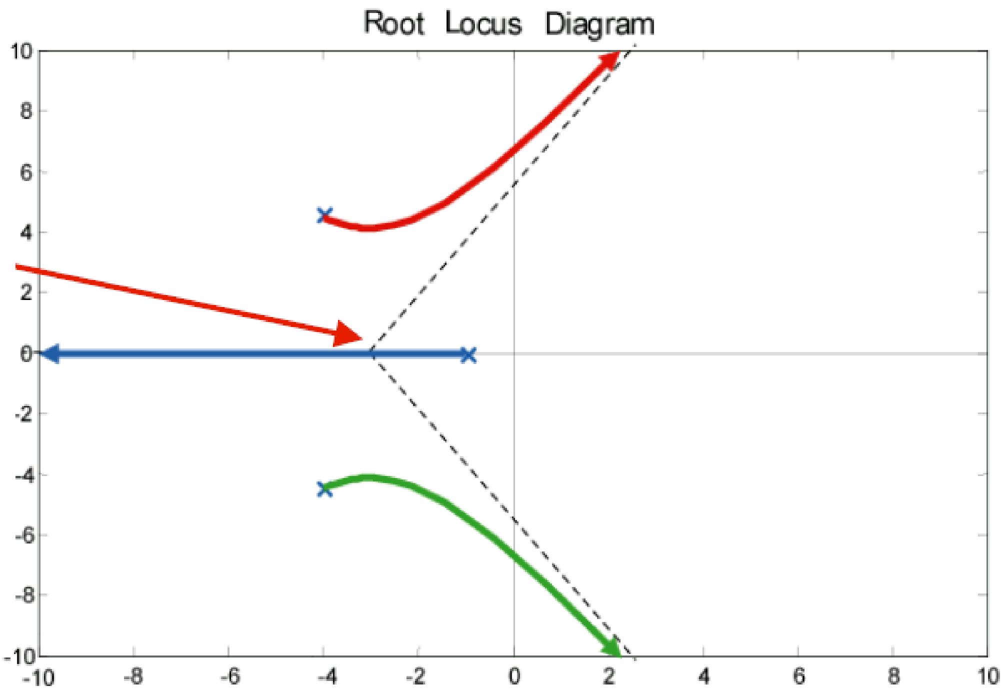
- per $0 < k < k_1$ il sistema è stabile e non oscilla (3 radici reali < 0);
- per $k_1 < k < k_2$ il sistema è stabile ma oscilla (1 radice reale < 0 e 2 complesse coniugate con parte reale < 0);
- per $k > k_2$ i rami blu e rosso finiscono nel semipiano positivo, quindi il sistema diventa instabile.

Esempi: sistemi del terzo ordine

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+8s+36)}$$

$$p_{1,2} = -4 \pm j4.47$$
$$p_3 = -1$$

asintoti



3 poli di G, quindi 3 rami; nessuno zero, quindi 3 asintoti all'infinito

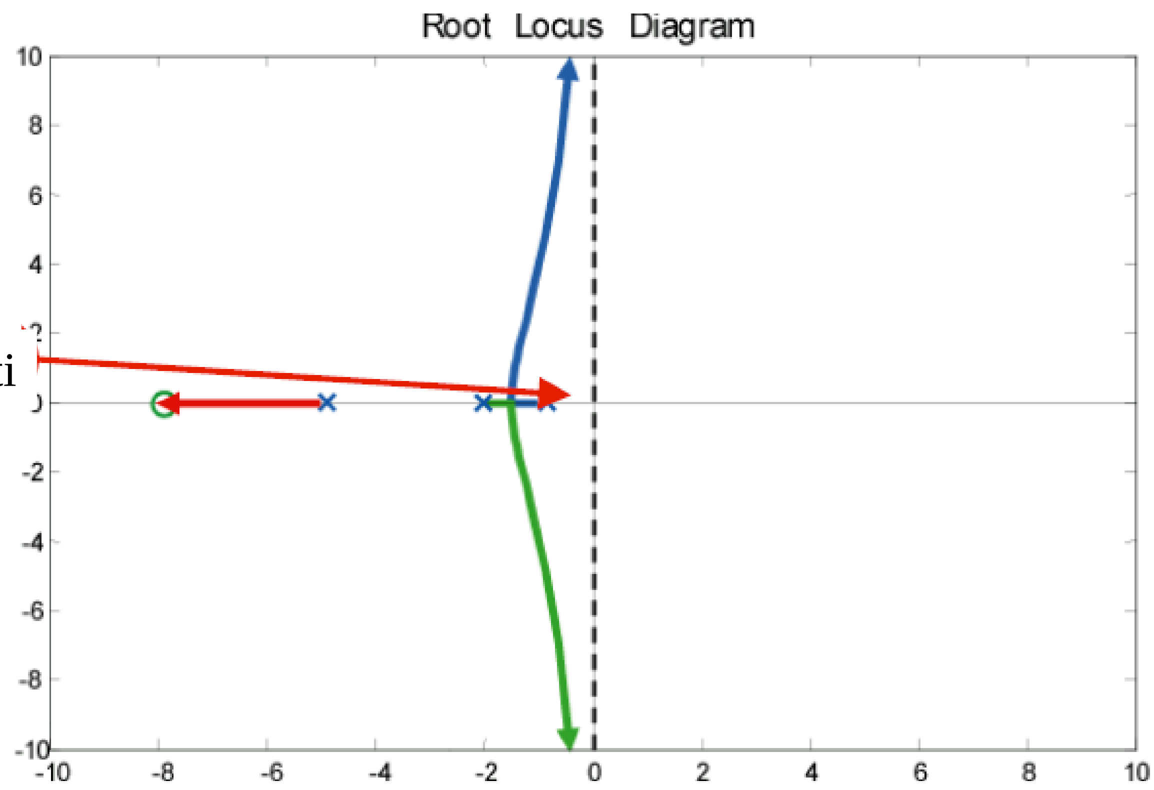
La situazione è simile a quella dell'esempio precedente, ma il sistema in ciclo chiuso oscilla sempre:

- per $0 < k < k_1$ il sistema è stabile ma oscilla (1 radice reale < 0 e 2 complesse coniugate con parte reale < 0);
- per $k > k_1$ i rami rosso e verde finiscono nel semipiano positivo, quindi il sistema diventa instabile.

Esempi: sistemi del terzo ordine

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

asintoti



3 poli di G, quindi 3 rami; 1 zero, quindi 2 asintoti all'infinito

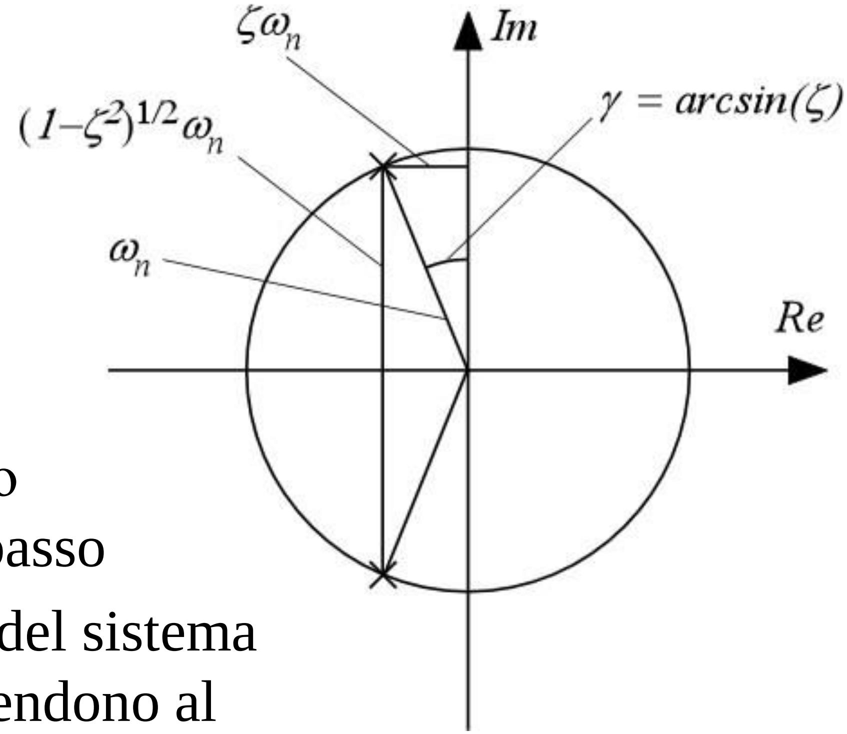
Qui invece, con l'aggiunta di uno zero della FTCA, il comportamento della FTCC è sempre stabile (gli asintoti dei rami blu e verde coincidono con l'asse immaginario, e tutti i rami sono interamente nel semipiano sinistro); vedremo tra poco che quando i poli sono troppo vicini all'asse immaginario, il comportamento in ciclo chiuso in realtà non è accettabile, perché corrisponde ad un comportamento molto oscillatorio, vicino al limite di stabilità (ζ molto piccolo).

Osservazioni

- negli esempi precedenti la *G(s)* è sempre di tipo 0, quindi il diagramma di Bode inizia con pendenza nulla e peggiora di -20 dB/dec per un polo reale o di -40 dB/dec per una coppia di poli complessi coniugati
- considerando la relazione tra le pendenze del diagramma delle ampiezze e l'andamento asintotico della fase, si può dedurre il fatto che per *G(s)* di tipo 0 di primo e secondo ordine senza zeri la fase non raggiunge mai i -180°, quindi il MF è sempre positivo per ogni *k*
- il sistema di tipo 0 del terzo ordine senza zeri invece ha una fase che tende a -270°, quindi alzando *k* prima o poi il sistema in ciclo chiuso diventa con MF < 0, instabile
- il sistema di tipo 0 del terzo ordine con uno zero invece ha una fase che non scende mai sotto -180°, il sistema in ciclo chiuso è quindi sempre stabile; ciò non è generale: nell'esempio lo zero in -8 è molto vicino al polo in -5, quindi si annullano quasi e la fase non scende mai sotto -180°; se lo zero fosse molto grande in modulo (ad esempio -100) il sistema in ciclo chiuso potrebbe essere instabile, con MF < 0, per alcuni valori di *k;* se invece lo zero fosse in mezzo ai poli, anche in questo caso la fase non potrebbe scendere mai sotto -180°

Osservazioni

- ragionando sulla parte reale ed immaginaria dei poli complessi coniugati, si deduce lo schema di figura
- tutte le coppie di poli che stanno su una circonferenza danno origine alla stessa pulsazione naturale, che è il raggio della circonferenza



- l'angolo γ tra l'asse immaginario ed i poli è l'arcoseno di ζ
- pertanto poli vicini all'asse immaginario (γ vicino a 0°) indicano smorzamento basso
- in alcuni degli esempi precedenti i poli del sistema in ciclo chiuso, pur rimanendo stabili, tendono al limite di stabilità (ζ nullo) per k tendente a infinito; ciò si può dedurre anche dal diagramma di Bode: la fase tende a -180° (quindi MF tende a 0) per k tendente a infinito; MG è comunque infinito