

# **Dinamica e controllo dei sistemi meccanici (6 cfu)**

Prof. Luca Bruzzone - DIME  
Tel. 010 3352967  
email: [luca.bruzzone@unige.it](mailto:luca.bruzzone@unige.it)

## **Sistemi lineari in tempo continuo**

## Riferimenti

- sono a disposizione su aulaweb:
  - il file: DCSM\_AA\_versione, contenente le slides delle lezioni relative ai sistemi lineari in tempo continuo
  - il file: metodo del luogo delle radici
  - il file: reti logiche e PLC
  - il file: risposta sistemi I e II ordine (in inglese) relativo alle proprietà dei sistemi del I e II ordine
  - i files: Esempio\_rete\_PID, Tutorial\_for\_PID (in inglese), esercizi\_svolti\_01, 02, 03, esempio\_uso\_CST\_matlab, che contengono materiale sul regolatore PID, esempi ed esercizi utili ai fini dell'esame e all'uso di Matlab
  - il file: grafico\_IIordine che contiene un semplice foglio di calcolo in Excel per il tracciamento della risposta a gradino di un sistema del II ordine sottosmorzato
  - il file: cartalogaritmicabode, contenente un foglio adatto a tracciare a mano diagrammi di Bode
- appunti presi a lezione (importante prenderli con accuratezza)
- per eventuali approfondimenti: Control Engineering – an introductory course – J. Wilkie, M. Johnson, R. Katebi; Palgrave, 2002, ISBN 0-333-77129-X

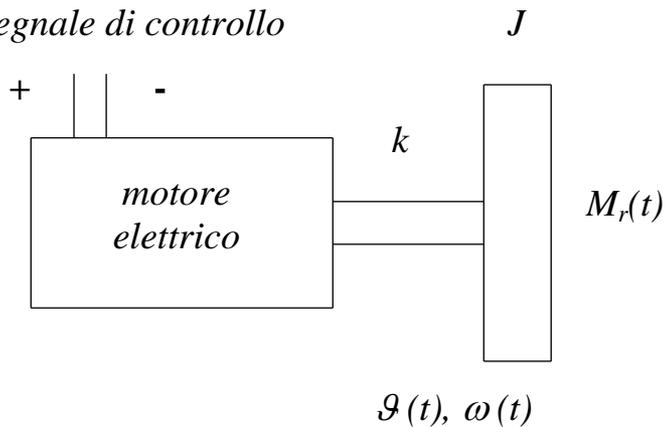
## Modalità di esame:

- prova scritta (al mattino):
  - esercizio relativo alla dinamica e controllo dei sistemi meccanici
  - su Aulaweb sono disponibili esempi di esami scritti; questi esempi sono con 11 domande, di cui le prime 8 sono un esercizio relativo alla dinamica e controllo dei sistemi meccanici con uno schema «standard», e le ultime 3 sono risposte aperte o piccoli esercizi; dall'A.A. 2019/2020 le ultime tre domande sono sostituite dalla prova orale
- prova orale: si svolgerà nel pomeriggio della data dello scritto per appelli con basso numero di iscritti (indicativamente  $< 15$ ), oppure nei giorni successivi (nella data della prova orale) per appelli con più alto numero di iscritti
- non è possibile conservare il voto dello scritto per un orale in una sessione successiva: scritto e orale devono svolgersi nella stessa sessione d'esame
- la prova orale consiste nella discussione dello scritto, con eventuali approfondimenti, e in una o due domande sulle parti del programma non oggetto della prova scritta
- il voto finale è dato dalla somma del voto della prova scritta (voto massimo 21 punti) e di quella orale (voto massimo 9 punti); la sufficienza dello scritto si raggiunge con 9 punti
- sia la prova scritta che quella orale devono essere sufficienti per superare l'esame
- la lode è attribuita in caso di prova scritta corretta e particolarmente ben svolta (*risultati numericamente giusti e spiegazione dettagliata dei calcoli effettuati*) e di una prova orale in cui si dimostra una *buona padronanza e comprensione della materia*

# Esempi di sistemi oggetto di controllo

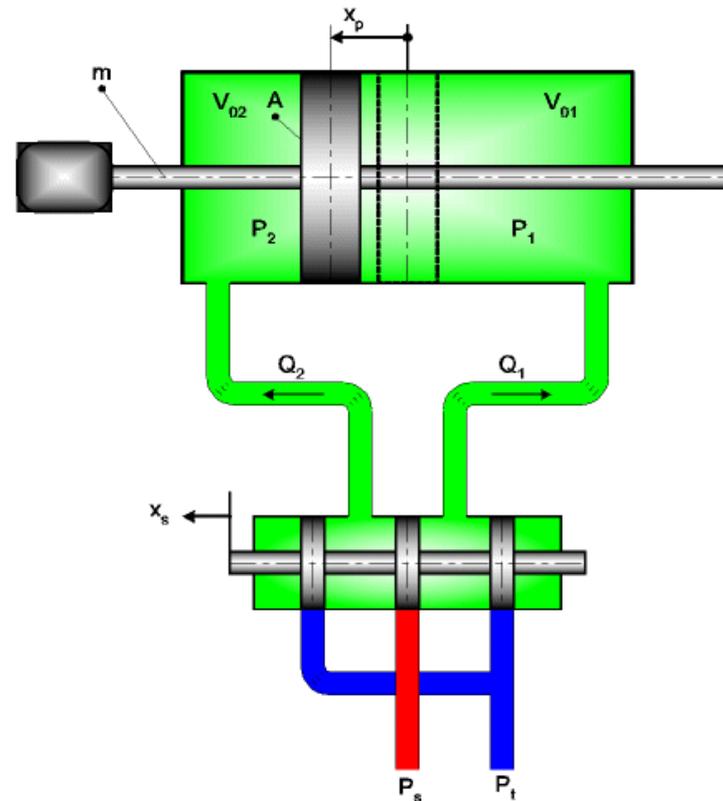


$V(t)$ : segnale di controllo



## Movimentazione con motore elettrico

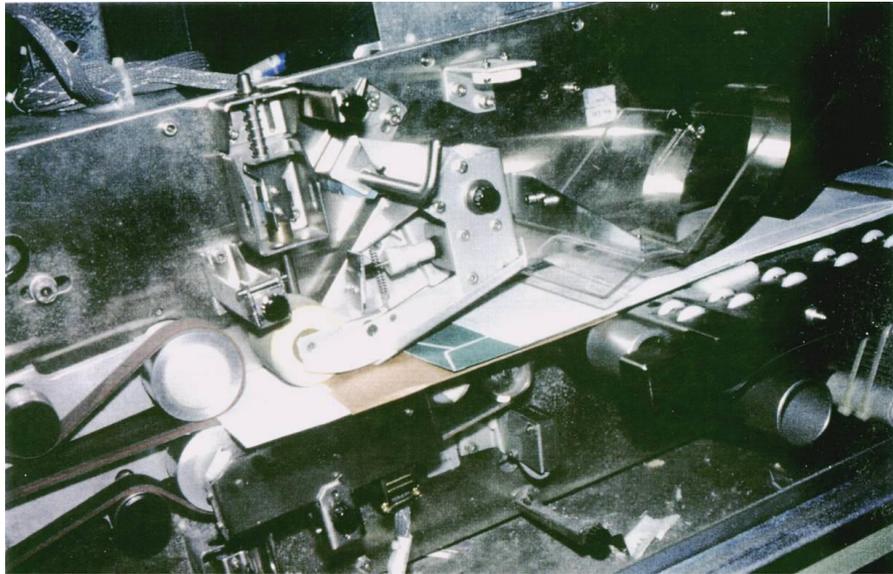
Controllare la rotazione  $G(t)$  e/o la velocità angolare  $\omega(t)$  del carico, connesso con una trasmissione al motore, per mezzo della tensione e corrente di alimentazione del motore.



## Movimentazione con attuatore oleodinamico

Lo spostamento  $x$  del cassetto di distribuzione consente il controllo della posizione  $x_p$  e della velocità del pistone.

# Esempi di sistemi oggetto di controllo

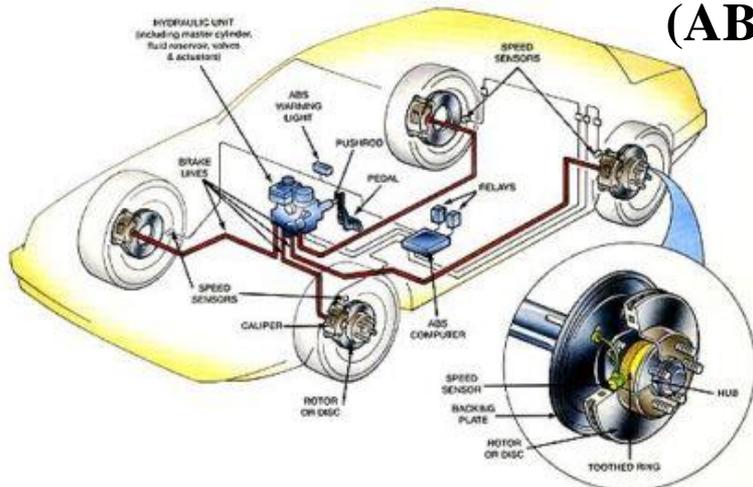


**Sistema per l'automazione postale**



**UAV**

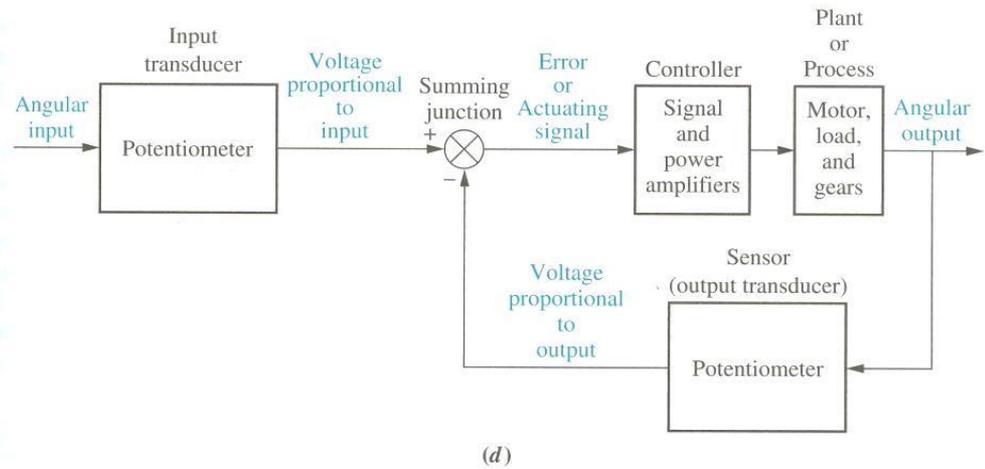
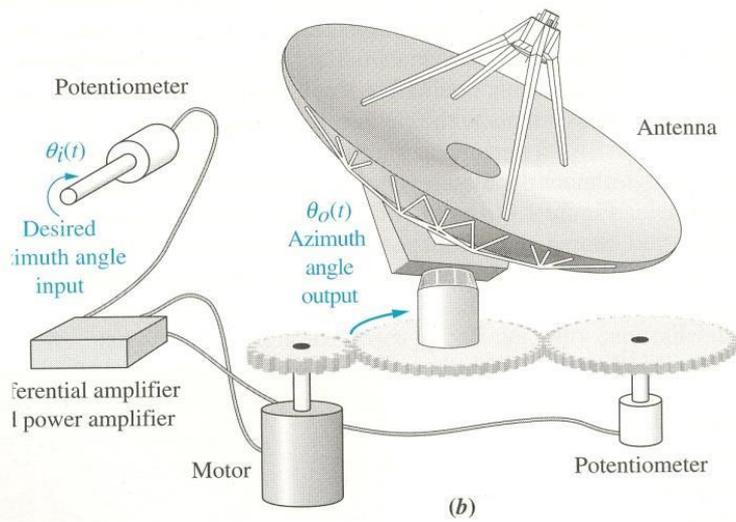
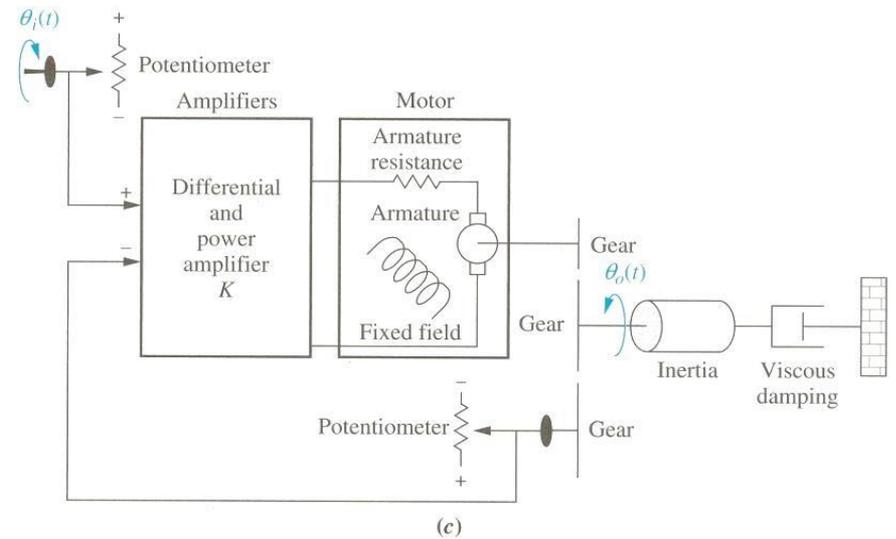
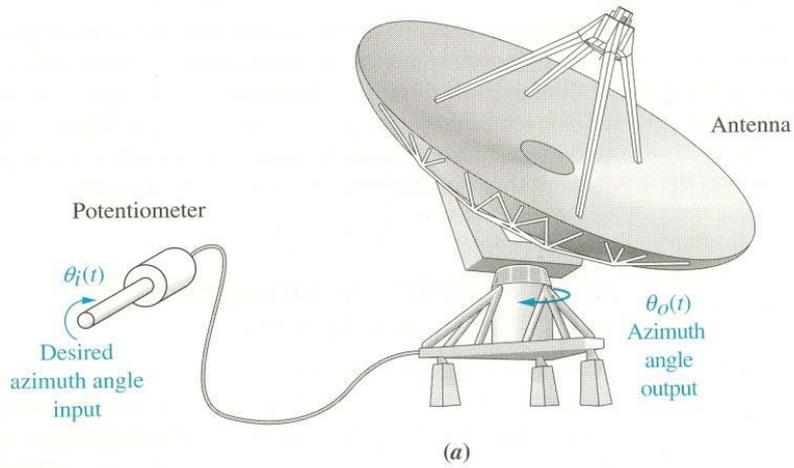
**Robot industriale**



**Automobile (ABS, cruise control)**



# Esempi di sistemi oggetto di controllo

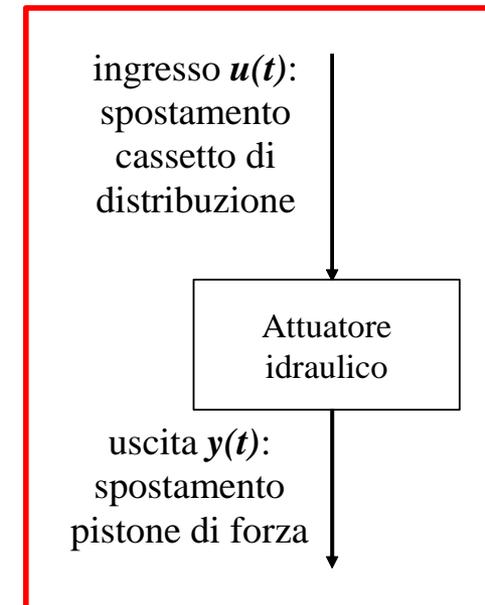
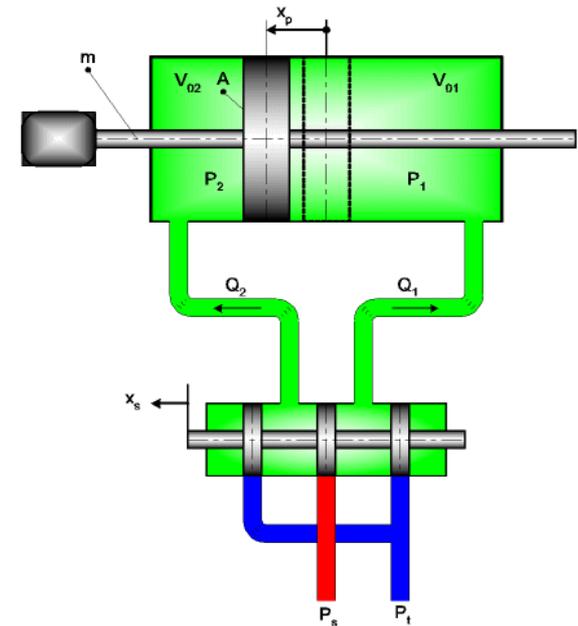
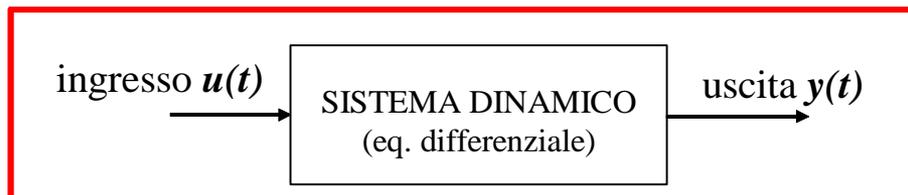


# SISTEMI DINAMICI

Lo studio dei sistemi di controllo è strettamente correlato allo studio della Dinamica dei sistemi. Cominceremo pertanto a ragionare proprio sulle proprietà dinamiche dei sistemi, partendo da semplici esempi.

Nello studio della dinamica dei sistemi un sistema è caratterizzato da:

1. un insieme di **ingressi** (grandezze che ne determinano il comportamento);
2. una o più **uscite**, che, solitamente, sono le grandezze che vogliamo controllare o che qualificano il comportamento del sistema;
3. l'**equazione dinamica del sistema**, che rappresenta il legame fra gli ingressi e le uscite.



# Esempio introduttivo

$$\frac{dV}{dt} = q_{ing}(t) - q_{usc}(t)$$

$$q_{ing}(t) = k_v u(t)$$

$$q_{usc}(t) = k_p \Delta p(t) = (k_p \rho g) h(t) = k_{usc} h(t)$$

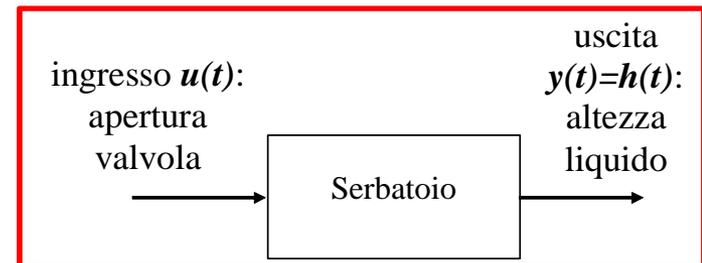
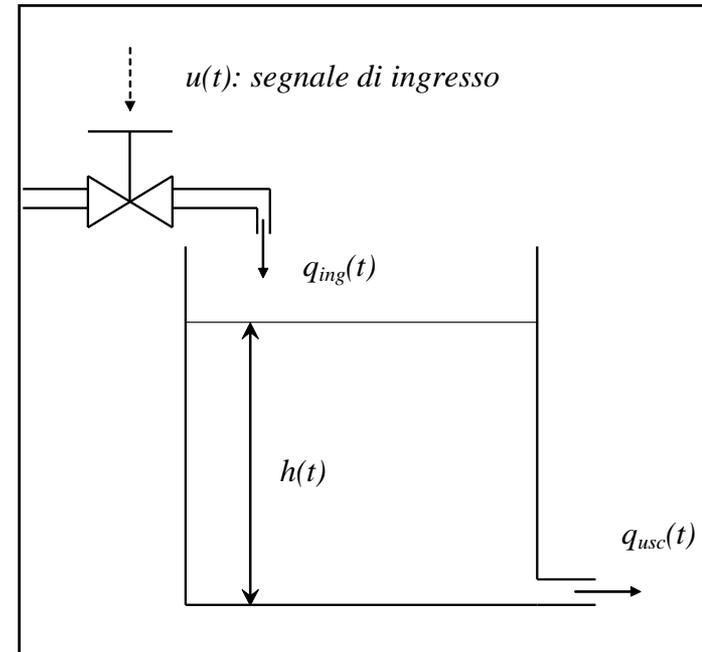
$$\frac{dV}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} \text{ da cui } A \frac{dh(t)}{dt} + k_{usc} h(t) = k_v u(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{k_{usc}}{A} h(t) = \frac{k_v}{A} u(t) \text{ e, essendo:}$$

$$k_h = \frac{k_{usc}}{A} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad k_u = \frac{k_v}{A} \left[ \frac{1}{s} \right] \text{ (se } u(t) \text{ è in m)}$$

si ha:

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_u u(t)$$



Con le approssimazioni assunte, il modello del sistema è costituito da una equazione differenziale ordinaria, lineare. In questo caso si tratta di un'equazione del I ordine, con incognita  $h(t)$ , che sarà funzione della condizione iniziale  $h(0)$  e della legge di apertura della valvola di immissione  $u(t)$ .

**Attenzione:** l'uscita da controllare NON è l'uscita "fisica" ( $q_{usc}$ ), bensì la variabile "di interesse"  $h(t)$ .

## Esempio introduttivo (segue)

$$q_{ing}(t) = k_v u(t)$$

$$q_{usc}(t) = k_{usc} h(t)$$

$$k_h = \frac{k_{usc}}{A} \quad k_u = \frac{k_v}{A}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_u u(t)$$

Dati numerici:

$$A = 2.5 \text{ m}^2$$

$$h_{max} = 2 \text{ m}$$

-  $u_{max} = 0.05 \text{ m}$  quando  $q_{ingmax} = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$ , per cui  $k_v = q_{ingmax}/u_{max} = 0.005/0.05 = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$

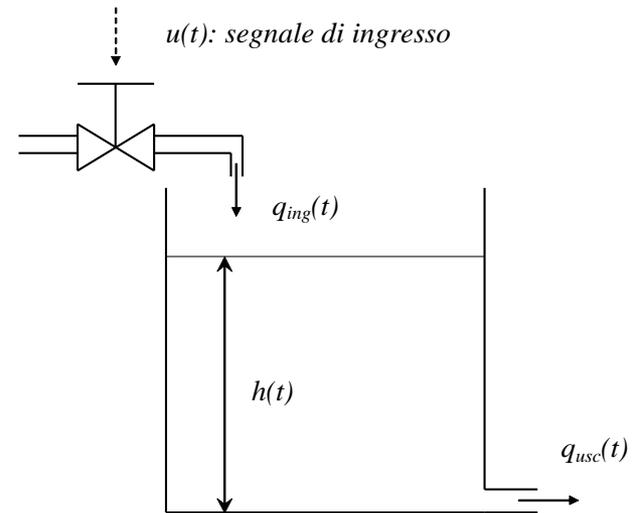
$$k_u = k_v/A = 0.1 / 2.5 = 0.04 \text{ 1/s}$$

-  $h_{rif} = 1 \text{ m}$  quando  $q_{uscrif} = 0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ , per cui  $k_{usc} = q_{uscrif}/h_{rif} = 0.006/1 = 0.006 \text{ m}^2/\text{s}$

$$k_h = k_{usc}/A = 0.006/2.5 = 0.0024 \text{ 1/s}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0024h(t) = 0.04u(t)$$

( $h$  e  $u$  espressi in  $m$ )



## Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_u u(t)$$

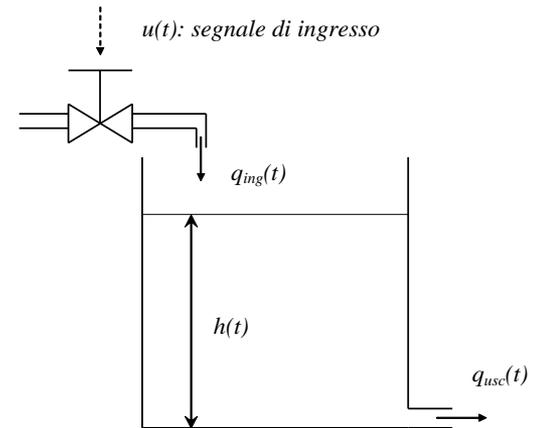
$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0024h(t) = 0.04u(t)$$

Dati numerici:

$$A = 2.5 \text{ m}^2$$

$$h_{max} = 2 \text{ m}$$

$$u_{max} = 0.05 \text{ m}$$



LIMITI del MODELLO (per ragionare sul legame fra modelli matematici e sistemi reali)

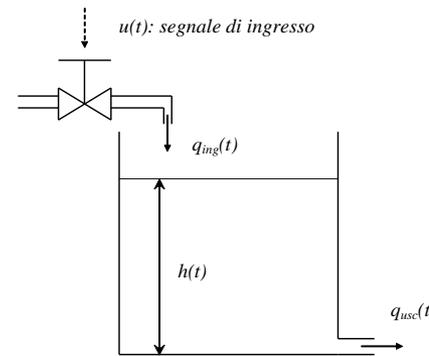
### 1) approssimazioni fisiche

- 1) il legame *lineare* fra portata in uscita  $q_{usc}$  e pressione (proporzionale all'altezza  $h$  del fluido)
- 2) il legame *lineare* fra apertura rubinetto e portata in ingresso  $q_{ing}$

### 2) limiti sulle variabili

- 1) l'equazione fornisce risultati anche se  $u(t)$  diventa  $< 0$ , ma questo, fisicamente, significa che il rubinetto in ingresso fornisce una portata negativa, cioè asporta liquido, fatto inconsistente con il sistema reale; analogamente, il rubinetto non può essere aperto "all'infinito", cosa che l'equazione consente, ma solo fino al suo massimo,  $u_{max} = 0.05 \text{ m}$ : in generale, bisogna verificare che, nelle soluzioni,  $0 \leq u(t) \leq u_{max}$
- 2) l'equazione fornisce risultati anche se  $h(t)$  diventa  $< 0$ , ma questo, fisicamente, significa che:  
a) nel serbatoio è presente una quantità di liquido "negativa", e b) il condotto in uscita fornisce una portata negativa, cioè fa rientrare liquido nel serbatoio, ambedue fatti inconsistenti con il sistema reale; allo stesso modo, fisicamente,  $h$  non può superare  $h_{max}$ , mentre l'equazione lo consente; verifica necessaria:  $0 \leq h(t) \leq h_{max}$

# Esempio introduttivo (segue)



$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_u u(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0024h(t) = 0.04u(t)$$

Dati numerici:

$$A = 2.5 \text{ m}^2$$

$$h_{max} = 2 \text{ m}$$

$$u_{max} = 0.05 \text{ m}$$

A serbatoio vuoto, apro il rubinetto di ingresso, con apertura costante  $u = 0.025 \text{ m}$ :

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0024h(t) = 0.001 (= 0.04 * 0.025)$$

$$h(0) = 0$$

Trovare  $h(t)$ ,  $q_{usc}(t)$  e  $q_{ing}(t)$

$$q_{ing}(t) = k_v u(t) = 0.10 * 0.025 = 0.0025 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$h(t) = \frac{0.001}{0.0024} (1 - e^{-0.0024t}) = 0.41\bar{6} (1 - e^{-0.0024t})$$

$$q_{usc}(t) = k_{usc} h(t) = 0.006 * 0.41\bar{6} (1 - e^{-0.0024t}) = 0.0025 (1 - e^{-0.0024t})$$

Forma generale della soluzione di una eq. diff. I ord., con ingresso costante e c.i. nulla:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = U$$

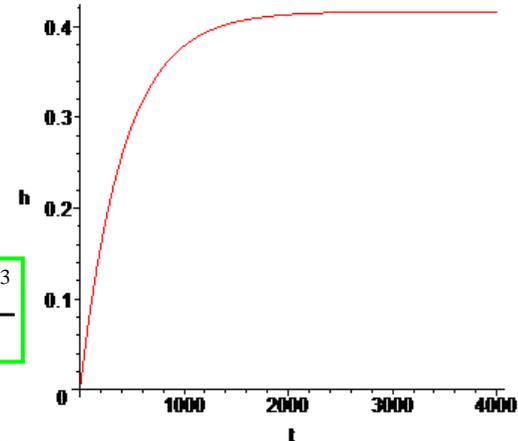
$$y(0) = 0$$

$$y(t) = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$y_{reg} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = U / k$$

$$h_{reg} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.41\bar{6} \text{ m}$$

$$q_{usc reg} = \lim_{t \rightarrow \infty} q_{usc}(t) = 0.0025 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$



Altezze in  $m$ , portate in  $\text{m}^3/\text{s}$ ;

Dal grafico si verifica la costante di tempo  $1/0.0024 = 416,7 \text{ s}$  in cui  $h$  raggiunge il 63.2% di  $h_{reg}$

## Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_n h(t) = k_u u_{reg} + \frac{q_d(t)}{A}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0024h(t) = 0.001 + 0.001(1 + \sin(0.01t))$$

$$h(0) = h_{reg} = 0.41\bar{6}$$

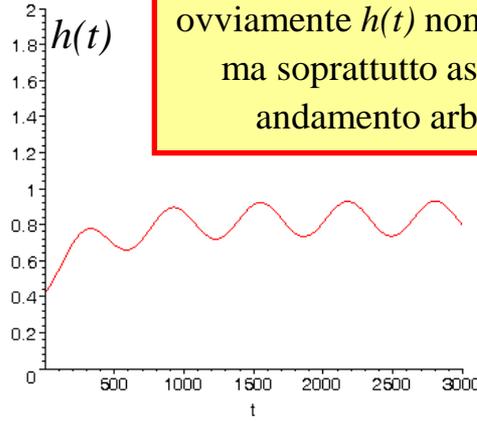
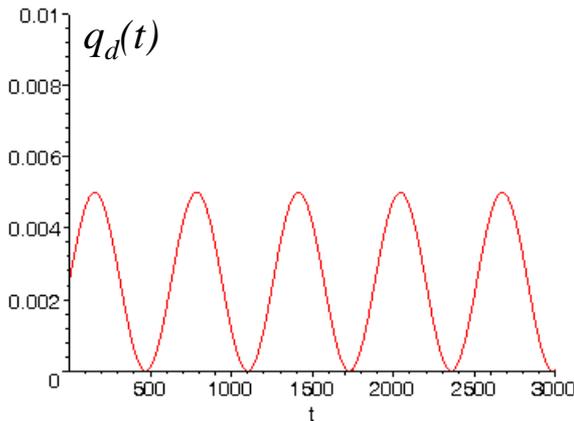
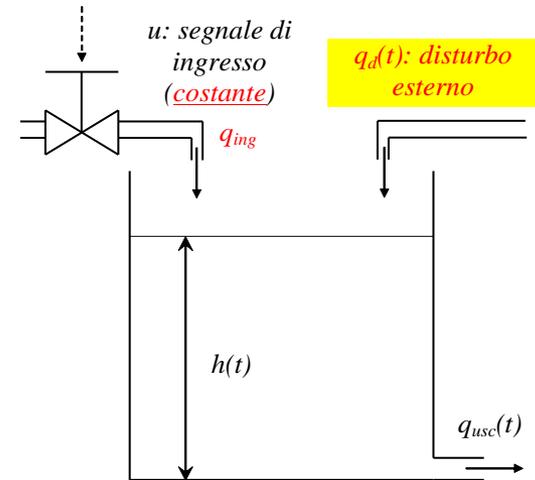
$$q_d(t) = k_d (1 + \sin(\omega_d t))$$

$$k_d = 0.0025 \text{ m}^3/\text{s} \quad \frac{k_d}{A} = 0.001 \text{ m/s}$$

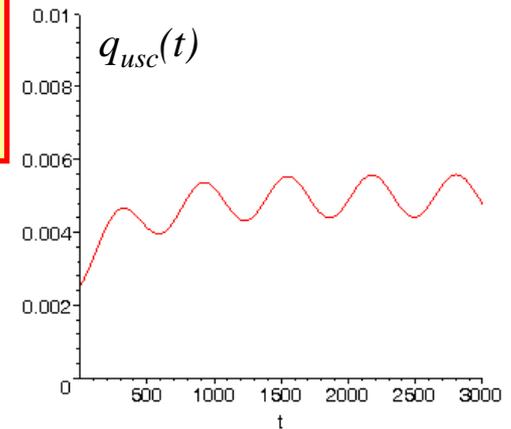
$$\omega_d = 0.01 \text{ rad/s}$$

Oss.: 1) cosa succederebbe se il disturbo fosse assente ?  
2) qual è il *periodo* del disturbo ?  
3) ovviamente  $q_d \geq 0$

Trovare  $h(t)$ ,  $q_{usc}(t)$ ,  $q_{ing}(t)$  e  $q_d(t)$



ovviamente  $h(t)$  non è costante, ma soprattutto assume un andamento arbitrario



Forma generale della soluzione di una eq. diff. I ord., con ingresso costante e armonico e c.i.  $\neq 0$

$$\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = A + B \sin(\omega t); \quad y(0) = C$$

$$y(t) = k_1 + k_2 e^{-kt} + k_3 \sin(\omega t + \varphi)$$

$k_1, k_2, k_3, \varphi$  dipendono da  $y(0), k, A, B, \omega$

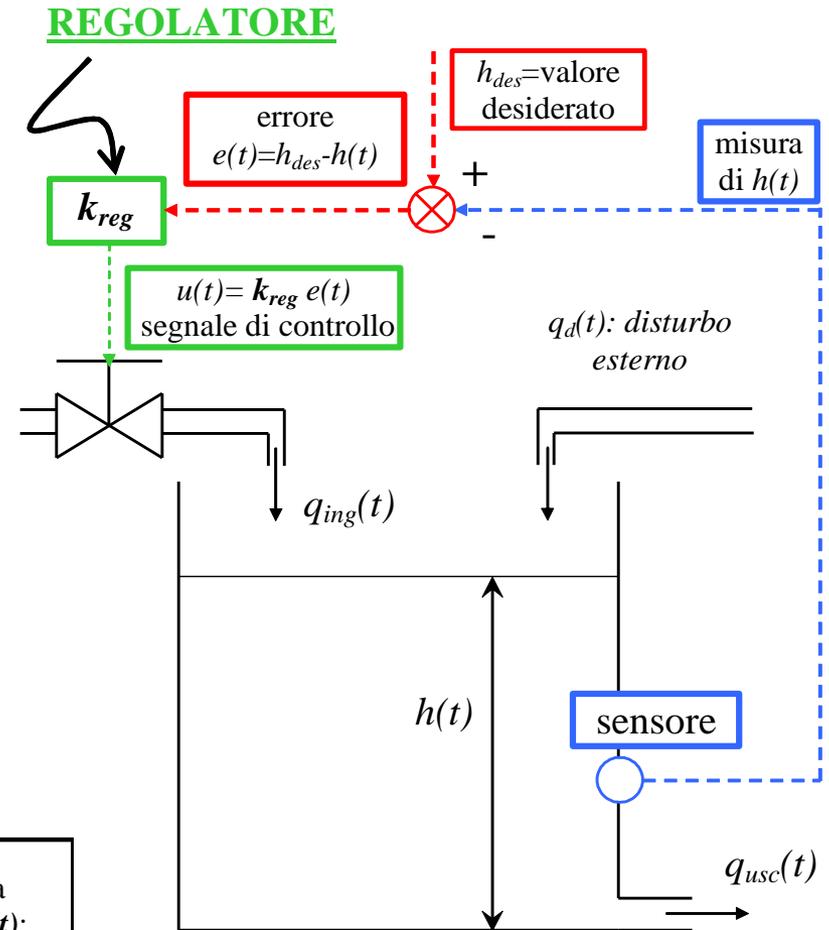
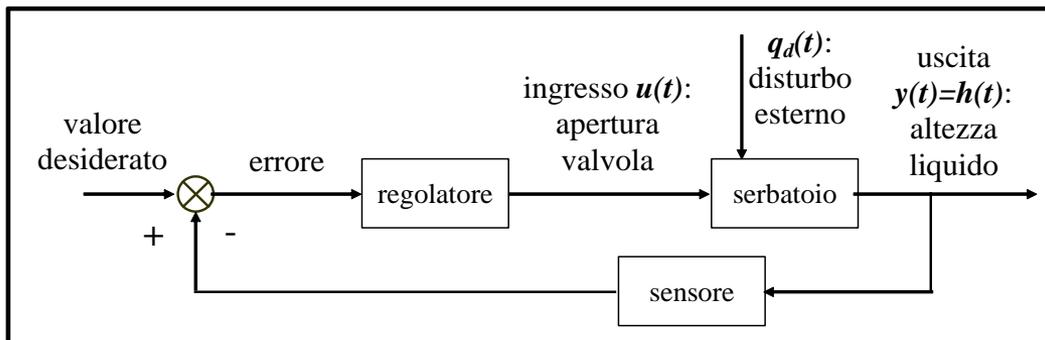
# Esempio introduttivo (segue)

Introduciamo una semplice **regolazione automatica del livello del serbatoio:**

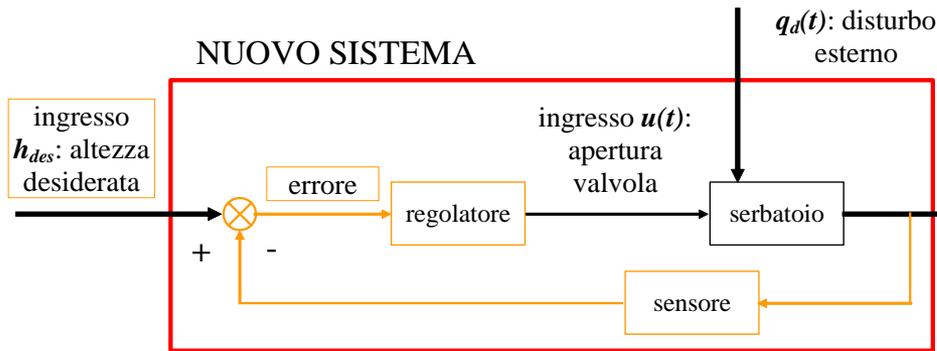
si desidera che la valvola in ingresso sia pilotata, automaticamente, in modo da mantenere, per quanto possibile, costante il livello nel serbatoio.

Una strategia "ragionevole" è quella di:

- ❑ **misurare** il livello  $h(t)$  con un sensore  
=> **CATENA DI MISURA**
- ❑ **confrontare** il livello corrente con quello desiderato  
=> **CALCOLO DELL'ERRORE  $e(t)$**
- ❑ **generare** un segnale di controllo (apertura valvola) in funzione dell'errore  
=> **CONTROLLO (PROPORIZIONALE)**



## Esempio introduttivo (segue)



$$\frac{dV}{dt} = q_{ing}(t) - q_{usc}(t) + q_d(t)$$

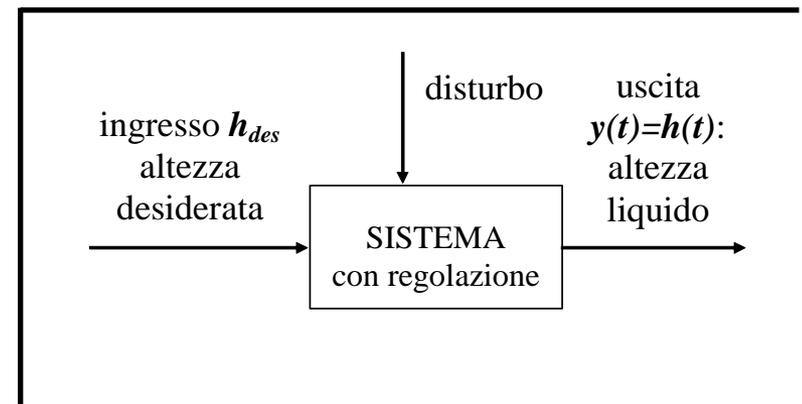
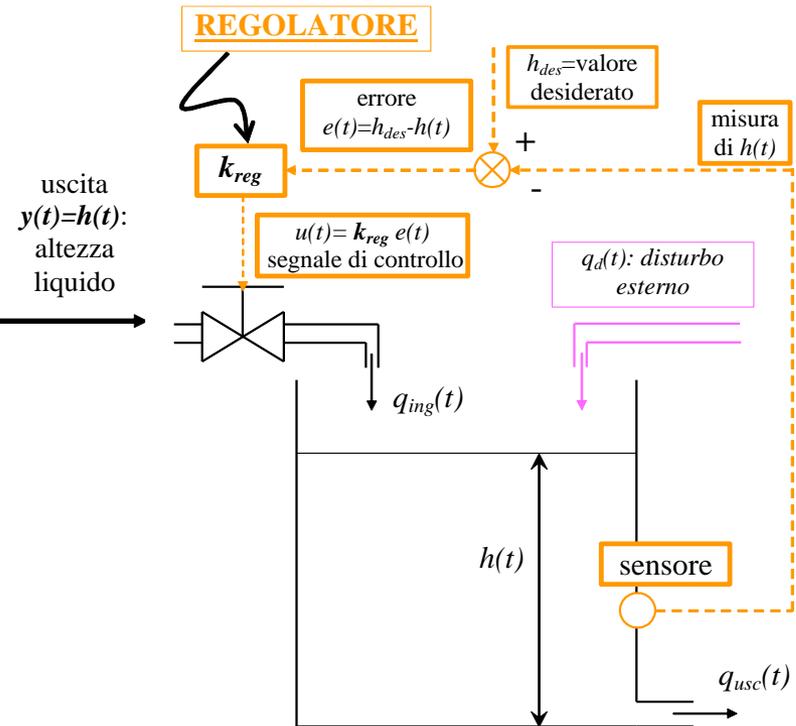
$$u(t) = k_{reg}(h_{des} - h(t))$$

$$q_{ing}(t) = k_v u(t) = k_v k_{reg}(h_{des} - h(t))$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{k_{usc}}{A} h(t) = \frac{k_v}{A} k_{reg}(h_{des} - h(t)) + \frac{q_d(t)}{A}$$

da cui:

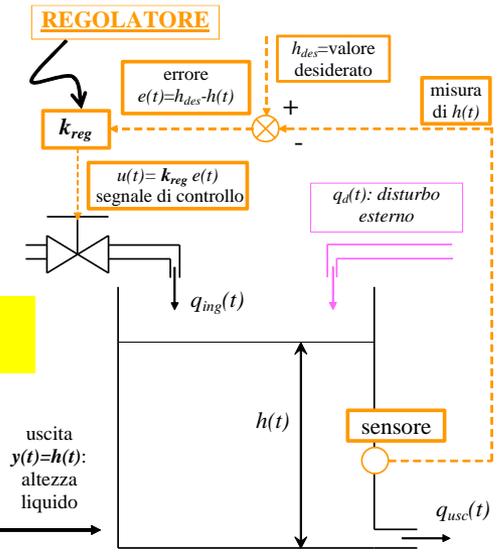
$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$



**Introducendo la catena di misura e il regolatore si ottiene un nuovo sistema dinamico, con caratteristiche diverse da quello originale.**

# Esempio introduttivo (segue)

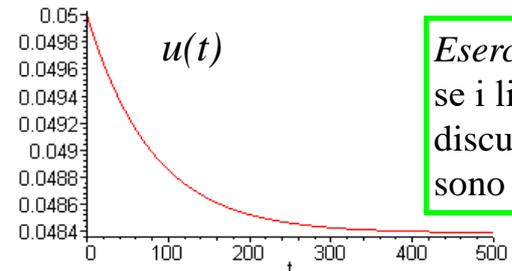
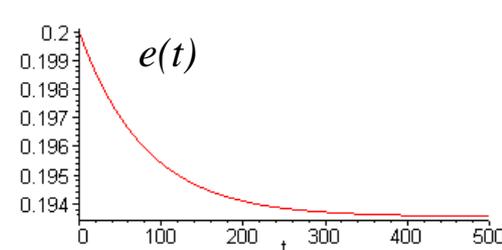
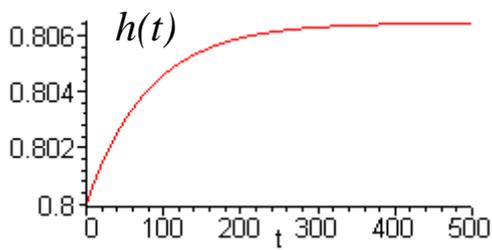
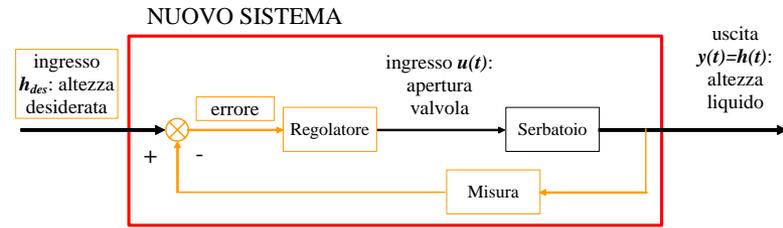
$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$



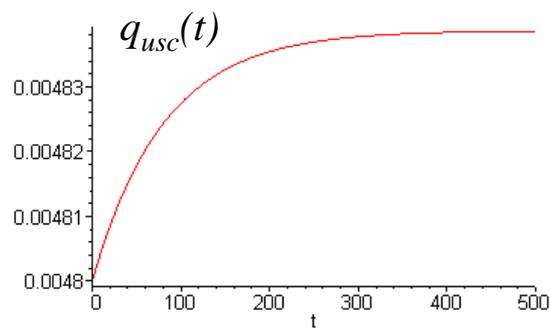
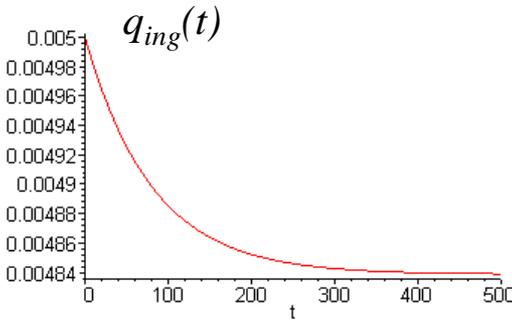
Caso 1: niente disturbo ( $q_d = 0$ ),  $k_{reg} = 0.25$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 0.8$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0124h(t) = 0.01$$

$h(0) = 0.8$



*Esercizio: verificare se i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono rispettati*



*Esercizio: utilizzando la soluzione generale presentata a pag. 11 e le definizioni delle varie variabili, ricavare le espressioni di  $h(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$ ,  $q_{ing}(t)$ ,  $q_{usc}(t)$ , creare i grafici dei loro andamenti, ad esempio in Excel, e poi confrontarli con quelli mostrati in questa pagina.*

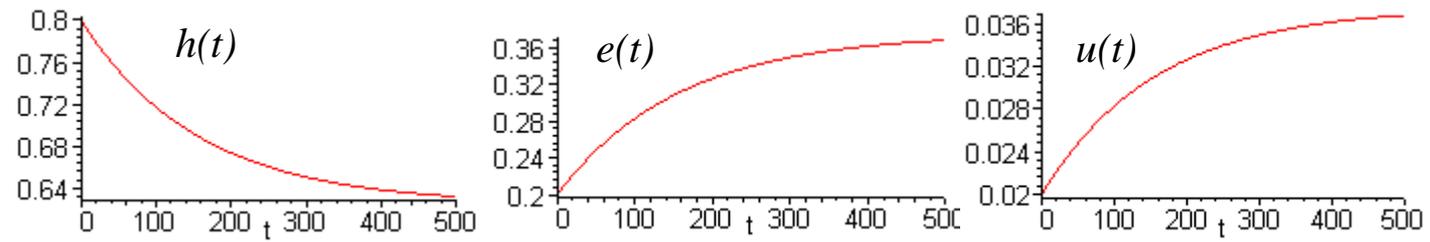
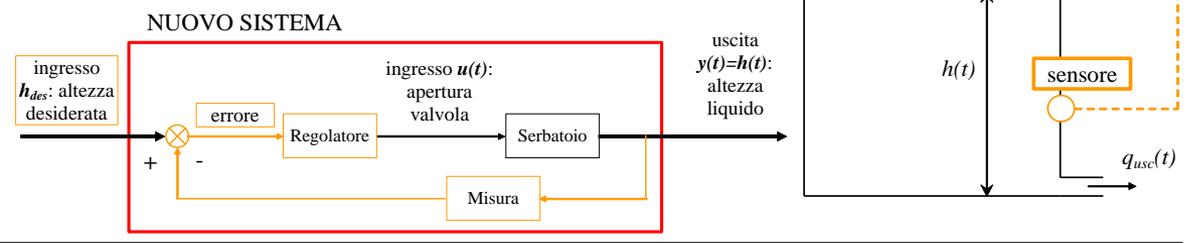
# Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$

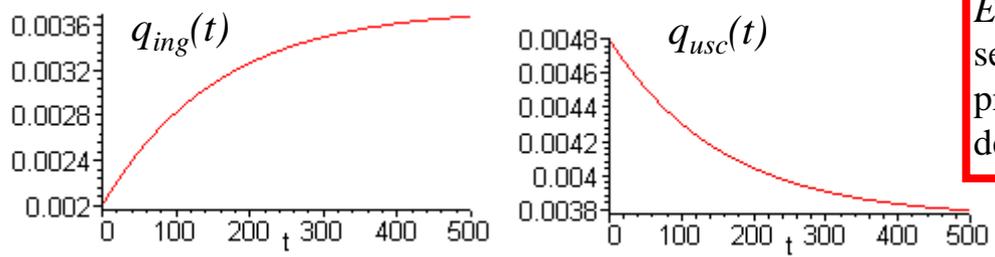
Caso 2: niente disturbo ( $q_d = 0$ ),  $k_{reg} = 0.1$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 0.8$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0064h(t) = 0.004$$

$h(0) = 0.8$



*Esercizio:* verificare se i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono rispettati

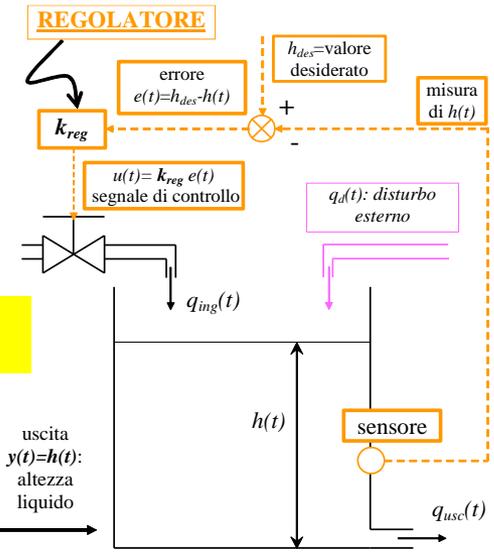


*Esercizio (importante):* confrontare i risultati (grafici e, se ricavati, analitici) di questa pagina e della precedente, deducendo da essi l'effetto della variazione del guadagno del regolatore  $k_{reg}$

*Esercizio:* utilizzando la soluzione generale presentata a pag. 11 e le definizioni delle varie variabili, ricavare le espressioni di  $h(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$ ,  $q_{ing}(t)$ ,  $q_{usc}(t)$ , creare i grafici dei loro andamenti, ad esempio, in Excel e poi confrontarli con quelli mostrati in questa pagina.

# Esempio introduttivo (segue)

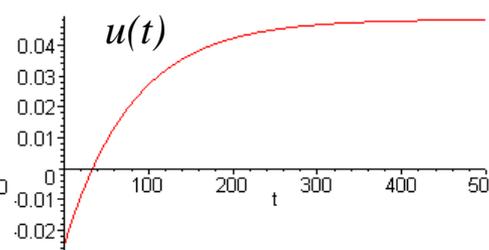
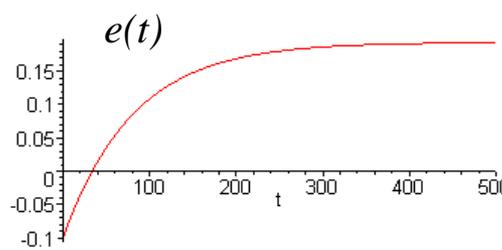
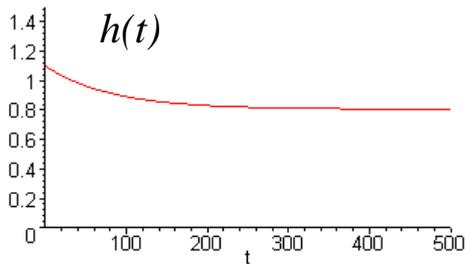
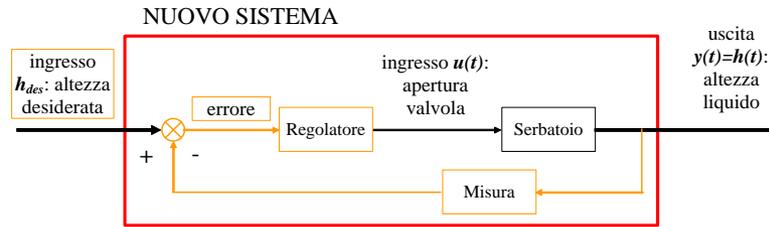
$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$



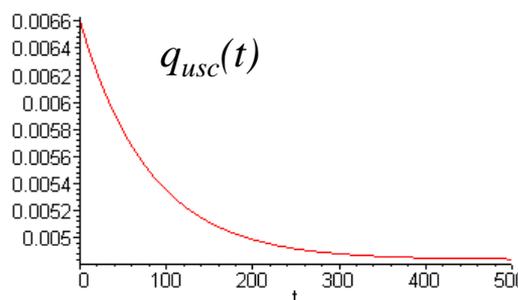
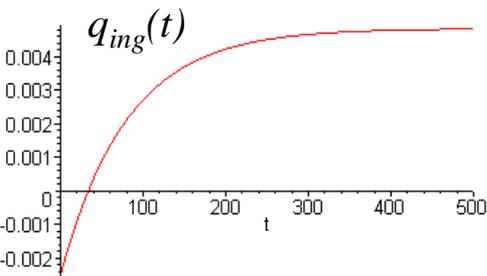
Caso 3: niente disturbo ( $q_d = 0$ ),  $k_{reg} = 0.25$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 1.1$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0124h(t) = 0.01$$

$h(0) = 1.1$



*Esercizio: verificare se i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono rispettati*



*Esercizio: utilizzando la soluzione generale presentata a pag. 11 e le definizioni delle varie variabili, ricavare le espressioni di  $h(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$ ,  $q_{ing}(t)$ ,  $q_{usc}(t)$ , creare i grafici dei loro andamenti, ad esempio, in Excel e poi confrontarli con quelli mostrati in questa pagina.*

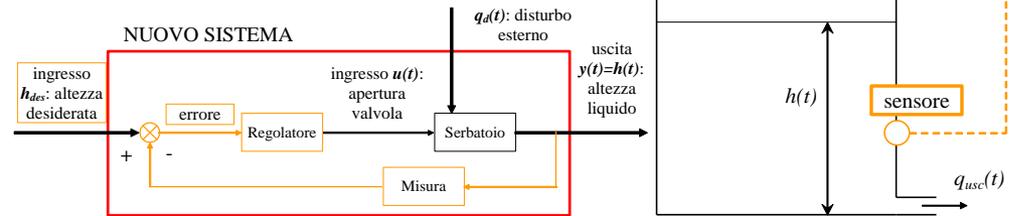
## Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$

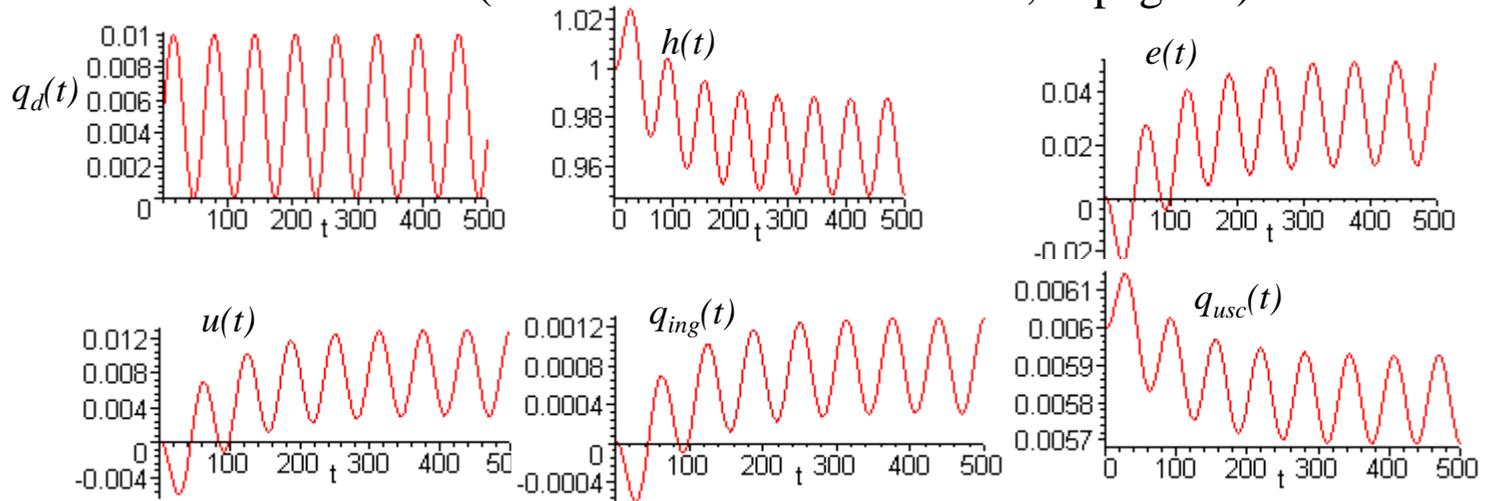
Caso 4:  $q_d = 0.005(1 + \sin(0.1t))$ ,  $k_{reg} = 0.25$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 1$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0124h(t) = 0.012 + 0.002 \sin(0.1t)$$

$$h(0) = 1$$



Soluzione (non discusso come ottenuta, v. pag. 12)



*Esercizi:* a) analizzare l'andamento delle curve, dandone un'interpretazione fisica, oltre che matematica. b) verificare se i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono rispettati; c) dai grafici, valutare ampiezza e periodo delle sinusoidi che rappresentano le risposte a regime

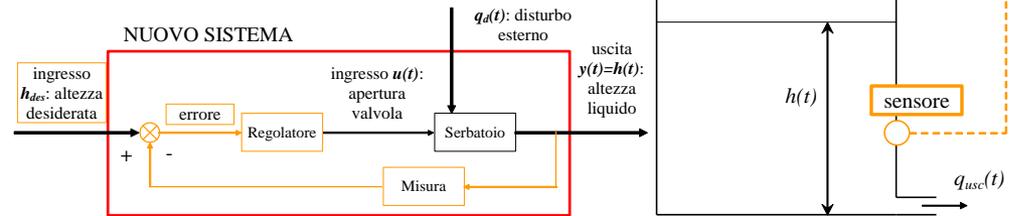
## Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$

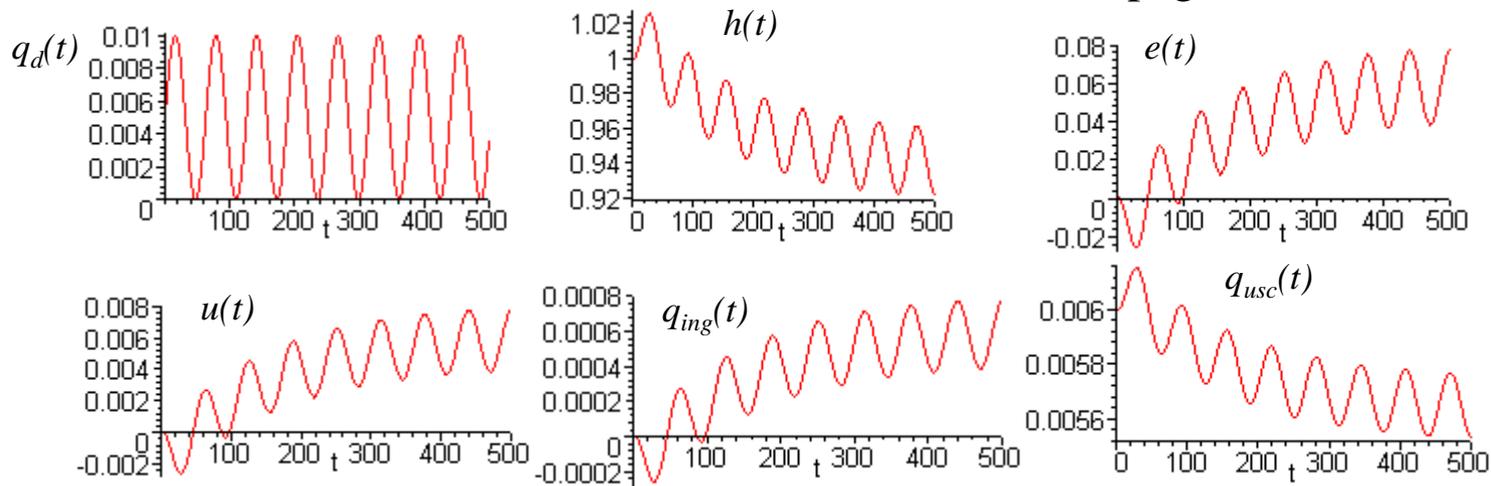
Caso 5:  $q_d = 0.005(1 + \sin(0.1t))$ ,  $k_{reg} = 0.1$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 1$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 0.0064h(t) = 0.006 + 0.002 \sin(0.1t)$$

$h(0) = 1$



Soluzione (non discusso come ottenuta, v. pag. 12)



**Esercizi:** a) analizzare l'andamento delle curve, dandone un'interpretazione fisica, oltre che matematica; b) confrontare i risultati con quelli di pag. precedente, e valutare "sperimentalmente" l'influenza della variazione di  $k_{reg}$ ; c) verificare se i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono rispettati.

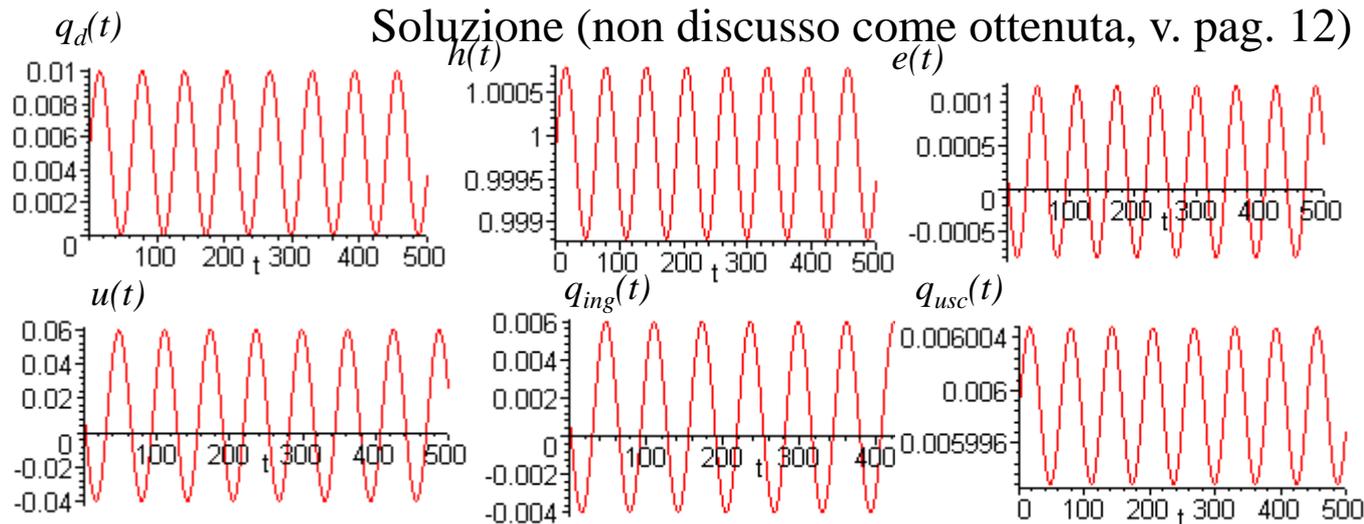
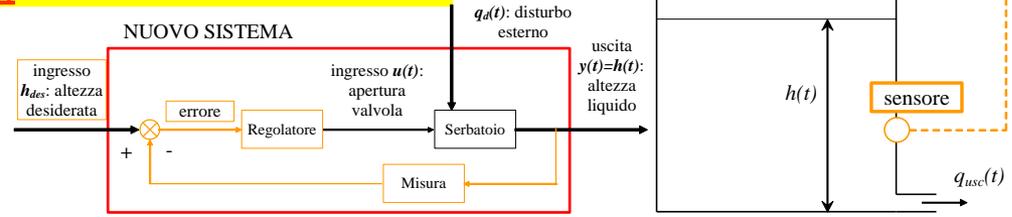
# Esempio introduttivo (segue)

$$\frac{dh(t)}{dt} + (k_h + k_u k_{reg}) h(t) = k_u k_{reg} h_{des} + \frac{q_d(t)}{A}$$

Caso 6:  $q_d = 0.005(1 + \sin(0.1t))$ ,  $k_{reg} = 50$ ,  $h_{des} = 1$ ,  $h(0) = 1$

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2.0024h(t) = 2.002 + 0.002 \sin(0.1t)$$

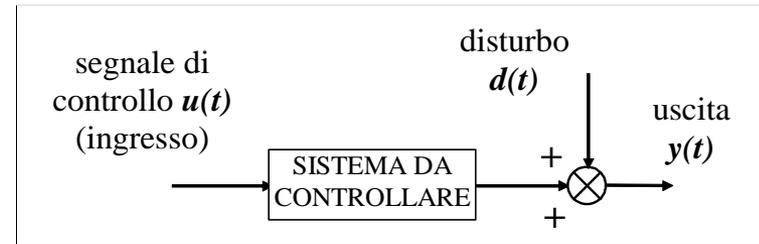
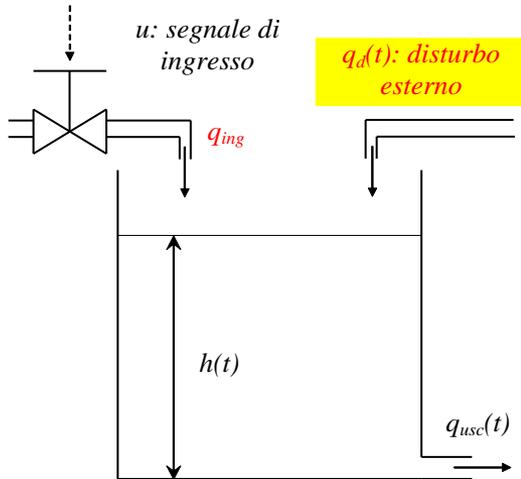
$h(0) = 1$



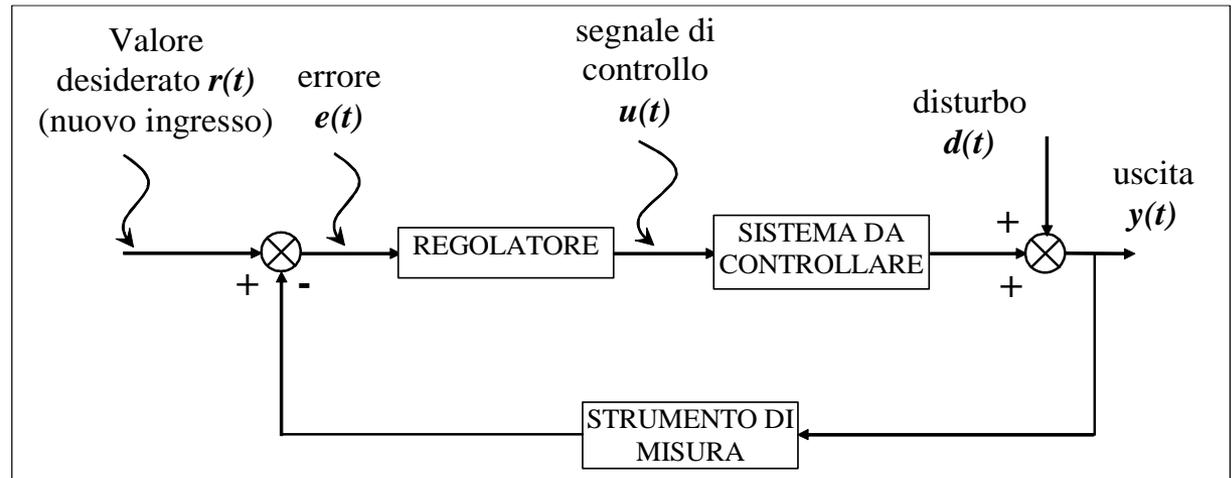
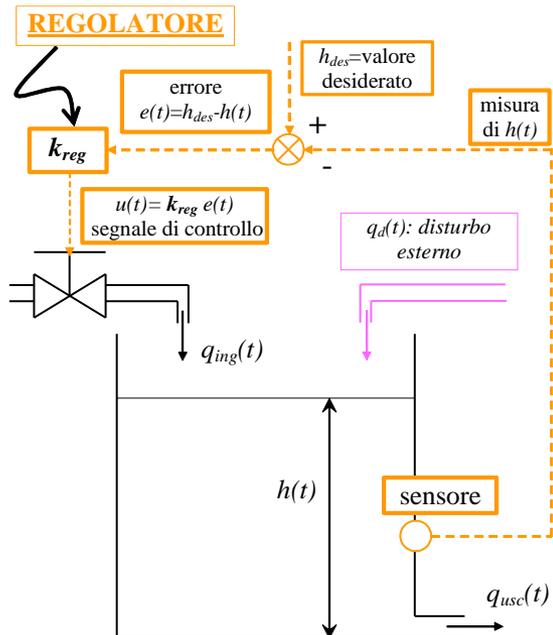
Questa soluzione ( $k_{reg} = 50$ ) fornisce un ERRORE molto basso, ma, purtroppo, è irrealizzabile fisicamente...

Esercizi: a) analizzare l'andamento delle curve, dandone un'interpretazione fisica, oltre che matematica; b) confrontare i risultati con quelli delle due pag. precedenti, e valutare "sperimentalmente" l'influenza delle variazioni di  $k_{reg}$ ; c) evidenziare dove i limiti "fisici" discussi a pag. 10 sono violati.

# Controllo automatico

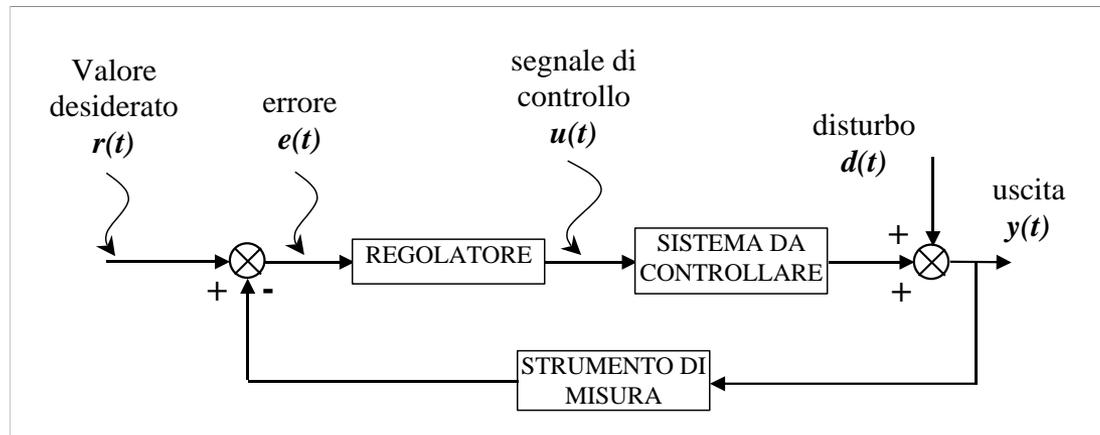


Il passaggio da un **sistema in ciclo aperto** ad un **sistema in ciclo chiuso**, in cui il segnale di controllo è funzione dell'uscita e di un valore desiderato, porta significativi cambiamenti nelle caratteristiche del sistema (miglioramenti, nel caso del serbatoio).



Alcuni tra i più importanti obiettivi del corso sono quindi:

- 1) comprendere gli effetti che l'introduzione di un **controllo in ciclo chiuso** produce su un sistema da controllare
- 2) comprendere quali **specifiche** possono essere scelte nella definizione delle prestazioni statiche e dinamiche di un sistema controllato
- 3) analizzare le **prestazioni** di un sistema controllato
- 4) scegliere il **tipo del regolatore**, i relativi **parametri di funzionamento** e valutare i vantaggi e gli svantaggi di soluzioni alternative, alla luce delle specifiche prescelte



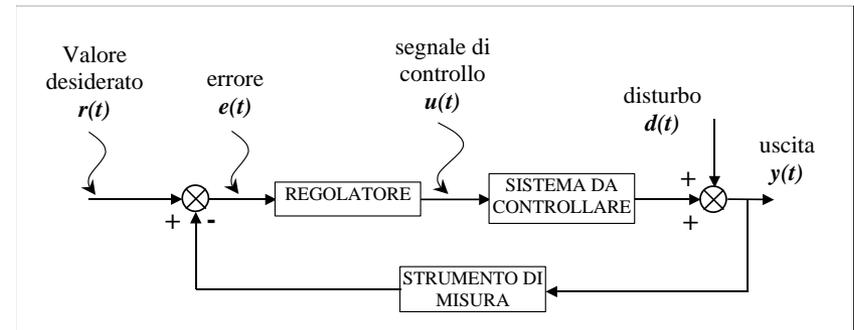
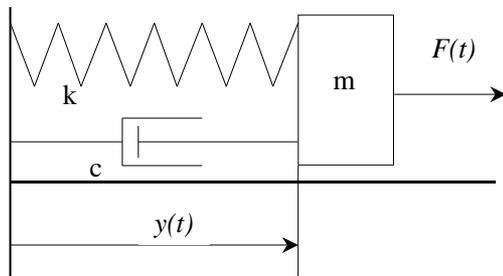
Limiti del corso:

- 1) fra le possibili variazioni di architettura di sistemi in ciclo chiuso, noi discuteremo solo quella relativa allo schema soprastante, che è la più diffusa
- 2) saranno trattati solo sistemi lineari, tempoinvarianti, deterministici, ad un ingresso e una uscita (*SISO: Single Input Single Output*)
- 3) saranno trattati solo i sistemi di controllo in *tempo continuo* (analogici, cioè niente controlli digitali, che sono in *tempo discreto*, con un *tempo di campionamento*), salvo accennare all'esistenza dei sistemi in tempo discreto e ai relativi problemi alla fine del corso
- 4) si consideri comunque che se il tempo di campionamento del controllore è molto più veloce della dinamica del sistema controllato, si può considerare in pratica il controllore in tempo continuo

E' possibile introdurre (o ripassare, se già noti) alcuni *strumenti matematici* che ci saranno utili per raggiungere gli obiettivi prefissati.

Osservando lo schema a blocchi del sistema, si vede che sono presenti "segmenti orientati" che connettono i vari blocchi; ciascun segmento rappresenta un segnale o (più in generale) una grandezza fisica che entra e/o esce da un blocco. Ciascun blocco trasforma un segnale (grandezza) in un altro segnale (grandezza).

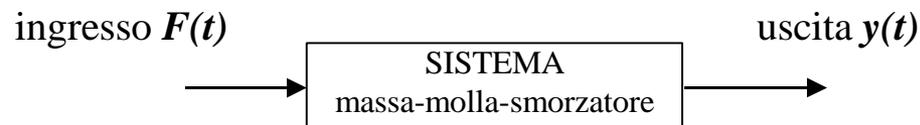
Facciamo un semplice esempio, relativo a un semplice sistema meccanico, il sistema massa-molla-smorzatore:

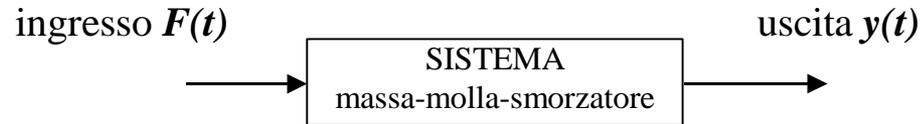


Come noto si ha:  $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$

essendo  $F(t)$  l'ingresso (la forza applicata alla massa) e  $y(t)$  l'uscita (lo spostamento della massa).

Con la notazione basata su schemi a blocchi, possiamo dire che il sistema massa-molla-smorzatore è un SISTEMA DINAMICO che trasforma una forza in uno spostamento:

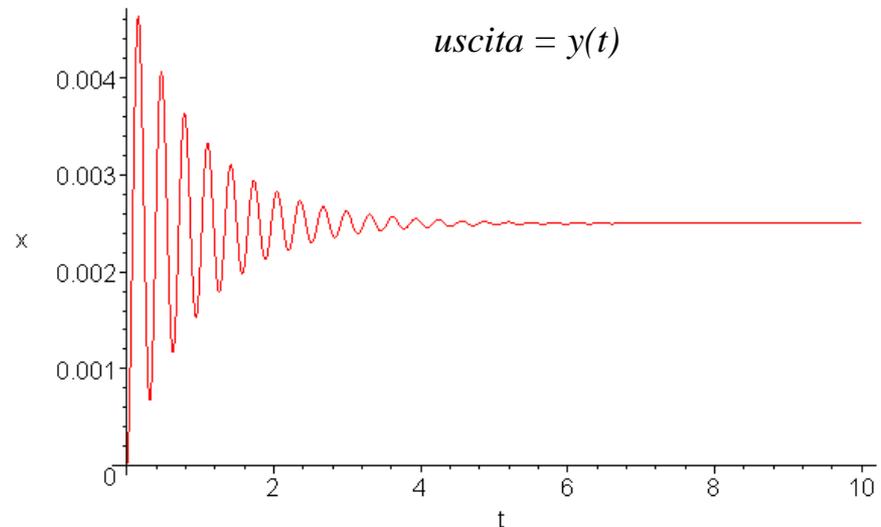
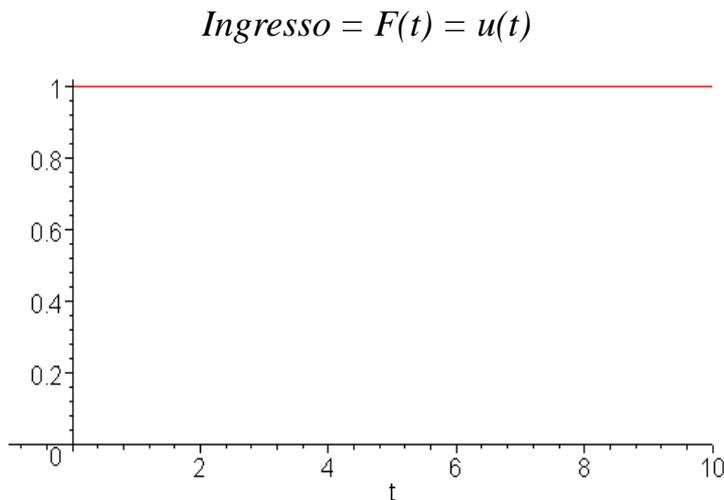




equazione che governa il sistema:  $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$

Si dice che questo è un **sistema dinamico** perché la relazione fra la grandezza di ingresso e quella di uscita è data da un'**equazione differenziale** (lineare a coefficienti costanti, in questo corso). Questo comporta l'esistenza di un legame complesso e tempovariante fra le due grandezze.

Ad esempio, sotto sono mostrati, senza dimostrazione per ora, gli andamenti di ingresso (gradino di forza unitario) e uscita (spostamento) per il sistema massa-molla-smorzatore considerato, con valori numerici dei parametri fisici pari a  $m = 1$  kg,  $c = 2$  Ns/m,  $k = 400$  N/m. Come si vede, le due funzioni sono molto diverse (notare anche le ampiezze delle ordinate).





In generale, un **sistema dinamico** è caratterizzato dalla seguente **equazione differenziale** (come detto, lineare a coefficienti costanti, in questo corso):

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad (1')$$

cioè

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ & = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1'')$$



Cambiando la notazione delle derivate, le equazioni 1' e 1'' possono anche essere espressa in forma più compatta nel modo seguente:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t) \quad (1''')$$

cioè

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ & = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1'''')$$

In generale, assumeremo sempre  $n = \text{ordine del sistema} \geq m = \text{ordine derivate dell'ingresso}$ .

La (1) può essere risolta dati:

- a) un insieme di  $n$  **condizioni iniziali per la funzione  $y(t)$  e per le sue derivate  $y^{(i)}$  fino all'ordine  $n-1$** , ovvero il seguente insieme di  $n$  NUMERI (indipendenti):  
 $\{ y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \dots, y^{(1)}(0), y(0) \}$
- b) la **funzione di ingresso  $u(t)$** , da cui si possono ottenere le sue derivate fino all'ordine  $m$ , ovvero il seguente insieme di  $m+1$  FUNZIONI (NON indipendenti, visto che sono derivate in cascata):  $\{ u^{(m)}(t), u^{(m-1)}(t), \dots, u^{(1)}(t), u(t) \}$ .

Ma come si risolve questo tipo di equazioni ?



Data la seguente equazione differenziale *lineare* di ordine  $n$ :

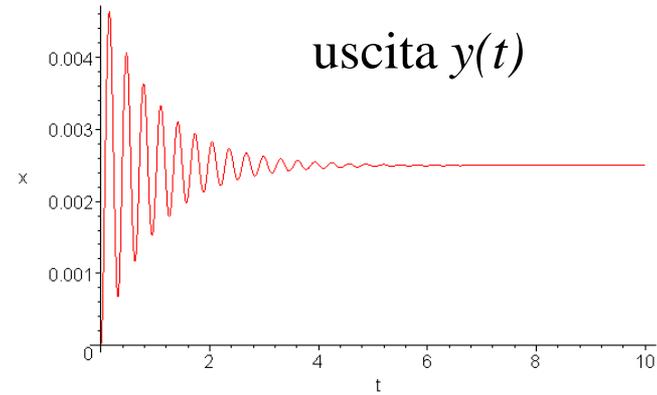
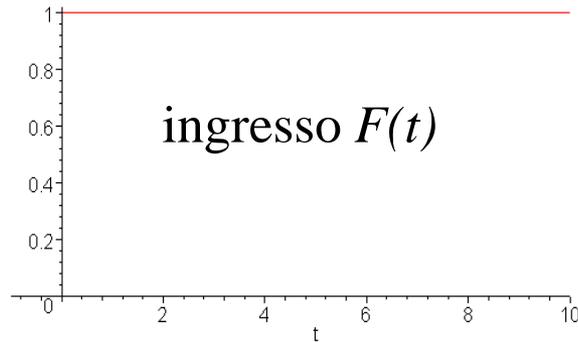
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (1)$$

Si definiscono i seguenti concetti:

- a) **risposta libera:** la risposta del sistema a condizioni iniziali non nulle, *in assenza di forzante* ( $u(t)=0$ ).
- b) **risposta forzata:** la risposta del sistema *in presenza di una forzante*, a sua volta scomponibile nella somma di due componenti:
  - b.1) risposta transitoria:** a partire da certe condizioni iniziali (eventualmente anche tutte nulle), il sistema sottoposto alla forzante è soggetto ad un periodo di “assestamento” (**transitorio**), fino a che non rimane soltanto la:
  - b.2) risposta a regime:** questa è la risposta “permanente” che il sistema fornisce dopo un tempo sufficientemente lungo, a transitorio esaurito; essa è causata dalla permanenza della forzante in ingresso.

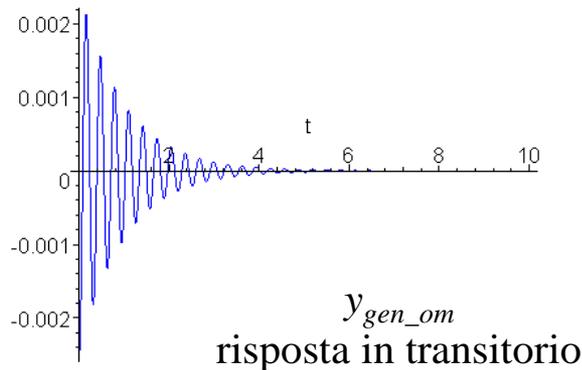
Tornando, ad esempio, al sistema del II ordine massa-molla-smorzatore, governato dall'equazione:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

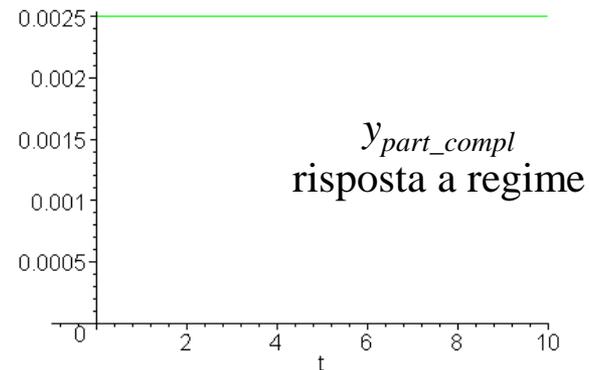


Si può osservare che la funzione di uscita può essere scomposta in due addendi, il primo, **transitorio**, che si esaurisce dopo un po' di tempo, il secondo, **a regime**, che ha la stessa forma dell'ingresso (è, cioè, costante, in questo caso), che permane nel tempo:

$$\text{uscita } y(t) =$$



+





$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (1)$$

Per un sistema dinamico **lineare**, la risposta nel tempo, data la forzante  $u(t)$  e un insieme di condizioni iniziali  $\{y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \dots, y^{(1)}(0), y(0)\}$ , sarà la *somma* di due termini:

- 1) l'**integrale generale dell'equazione omogenea associata**  $y_{gen\_om}$ , ottenuto risolvendo la (1) dopo aver eliminato il termine noto  $u(t)$ , corrispondente al **comportamento transitorio** del sistema, e
- 2) un **integrale particolare dell'equazione completa**  $y_{part\_compl}$ , corrispondente al **comportamento a regime** del sistema; esso è una funzione dello stesso tipo della funzione in ingresso  $u(t)$ .

$$y(t) = y_{gen\_om}(t) + y_{part\_compl}(t) = y_{transitorio}(t) + y_{regime}(t)$$

Per ottenere operativamente le soluzioni cercate, e per altre finalità più chiare in seguito, è ora utile introdurre uno strumento matematico denominato **trasformata di Laplace**.

# Trasformata di Laplace

(strumento matematico utile per il trattamento di problemi rappresentati mediante equazioni differenziali)

Definizione della trasformazione diretta:

$$f(t) \Rightarrow F(s): \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Definizione della trasformazione inversa:

$$F(s) \Rightarrow f(t): \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma - jT}^{\sigma + jT} F(s)e^{+st} ds$$

dove  $\sigma$  è un numero reale per cui il contorno del cammino di integrazione sia contenuto nella regione di convergenza di  $F(s)$ .

Questa operazione matematica consente di trasferire lo studio di un problema matematico, come quello definito dalle (1), dal dominio del tempo (variabile  $t$ ) al campo complesso (variabile  $s$ ). Infatti  $s$ , variabile della trasformata di Laplace, è una variabile complessa:

$$s = \sigma + j\omega$$

**Operativamente, le trasformazioni dirette e inverse sono svolte per mezzo di tabelle che ci dicono come associare una certa funzione del tempo alla sua trasformata e viceversa.**

# Trasformata di Laplace: proprietà fondamentali

Alcune proprietà di base fornite senza dimostrazione, ma da meditare attentamente:

**linearità :**  $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$

**differenziazione :**  $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$

**integrazione :**  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$

**convoluzione :**  $\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$

**differenziazione multipla :**  $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

In particolare, per condizioni iniziali nulle, la differenziazione multipla si semplifica molto:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s)$$

| $f(t)$   | $F(s)$  |
|--|---|
| Step function, $u(t)$  | $\frac{1}{s}$   |
| $e^{-at}$  | $\frac{1}{s+a}$   |
| $\sin \omega t$  | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$                           |
| $\cos \omega t$  | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$                                |
| $t^n$  | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                                    |
| Impulse function $\delta(t)$   | 1   |
| $e^{-at} \sin \omega t$  | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$                       |
| $e^{-at} \cos \omega t$  | $\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$                        |
| $\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin (\omega t + \phi),$   | $\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$                     |
| $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha-a}$   |   |
| $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \zeta < 1$   | $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$    |
| $\frac{1}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-at} \sin (\omega t - \phi),$   | $\frac{1}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$                         |
| $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{-a}$   |   |
| $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi),$   | $\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$ |
| $\phi = \cos^{-1} \zeta, \zeta < 1$  |   |
| $\frac{\alpha}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2} \right]^{1/2} e^{-at} \sin (\omega t + \phi),$ | $\frac{(s+\alpha)}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$                |
| $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha-a} - \tan^{-1} \frac{\omega}{-a}$   |   |

## Tabella delle trasformate di Laplace di uso più comune

| $f(t)$                   | $F(s)$                                      |
|--------------------------|---|
| $f(t)e^{-at}$            | $F(s+a)$                                    |
| $te^{-at}$               | $\frac{1}{(s+a)^2}$                         |
| $\frac{t^2 e^{-at}}{2!}$ | $\frac{1}{(s+a)^3}$                         |
| $t \sin(\omega t)$       | $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$      |
| $t \cos(\omega t)$       | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $1 - e^{-at}$            | $\frac{a}{s(s+a)}$                          |
| $f(t-T)$                 | $e^{-sT} F(s)$                              |

# Teoremi del valore finale e del valore iniziale

Il teorema del valore finale stabilisce che:

se esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ,

allora:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Il teorema del valore iniziale stabilisce invece che:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

## Trasformata di Laplace (esempio)

Riprendiamo il sistema massa-molla-smorzatore, di qualche pagina fa, e cerchiamo di risolverlo con la trasformata di Laplace, per *condizioni iniziali nulle* e *ingresso a gradino* di forza. Alla fine otterremo la curva di risposta già mostrata, e qui a fianco riportata. ( $m=1$  kg,  $c=2$  N/(m/s),  $k=400$  N/m)

Data l'equazione del sistema da risolvere:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

trasformando, per condizioni iniziali nulle, si ottiene:

(è stata utilizzata la regola di trasformazione delle derivate per c.i. nulle)

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = U(s) \text{ e cioè, raccogliendo, } (ms^2 + cs + k)Y(s) = U(s)$$

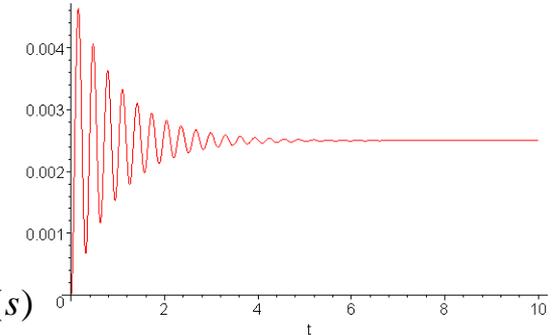
da cui posso ricavare la trasformata dell'uscita  $Y(s)$  in funzione della trasformata dell'equazione del sistema e di quella dell'ingresso:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{(ms^2 + cs + k)} ; \text{ l'ingresso } u(t) \text{ è a gradino (funzione "step", v. tabelle precedenti),}$$

e, pertanto, la sua trasformata è  $U(s) = \frac{1}{s}$ ; sostituendo si ottiene:

$$Y(s) = \frac{1}{s(ms^2 + cs + k)}$$

Ora è necessario tornare sulla tabella, colonna  $F(s)$  (trasformate), cercare una trasformata la cui "forma" in  $s$  corrisponda a quella della nostra funzione. La corrispondente funzione, alla stessa riga, nella colonna  $f(t)$  ci dice qual è la forma della funzione cercata  $y(t)$ , soluzione dell'equazione differenziale considerata.



## Trasformata di Laplace (esempio, segue)

La funzione considerata:

$$Y(s) = \frac{1}{s(ms^2 + cs + k)}$$

ha la stessa struttura (in  $s$ ) della seguente trasformata, estratta dalle tabelle:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad f(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$
$$\phi = \arccos(\zeta), \quad \zeta < 1$$

conosco  $Y(s)$

dalle tabelle ricavo  $F(s)$  che ha la stessa forma in  $s$ ,

e dalle tabelle so che  $f(t)$  è l'antitrasformata di  $F(s)$

$\Rightarrow$  posso ricavare  $y(t)$

## Trasformata di Laplace (esempio, segue)

Si devono far corrispondere i parametri della nostra  $Y(s)$  a quelli della  $F(s)$  trovata, in modo da poter calcolare la  $y(t)$  cercata, a partire dalla espressione (nota) della  $f(t)$ .

Prima di tutto, devono corrispondere i termini in  $s$ .

A questo scopo, si dividano numeratore e denominatore della  $Y(s)$  per  $m$  ottenendo

$$Y(s) = \frac{1/m}{s\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} \quad \left( \text{si ricorda che } F(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \right)$$

Imponendo che i coefficienti dei denominatori di  $Y(s)$  e  $F(s)$  siano uguali, si ha  $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$  e  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$

Da queste espressioni, si possono ricavare i valori dei parametri "normalizzati"  $\zeta$  e  $\omega_n$  in funzione dei parametri fisici del sistema ( $m, c, k$ )

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

## Trasformata di Laplace (esempio, segue)

Ora si possono far corrispondere le costanti a numeratore

$$Y(s) = \frac{1/m}{s\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} \quad \text{e} \quad F(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

per rendere il numeratore di  $Y(s)$  uguale a quello di  $F(s)$  basta moltiplicarlo per  $k$ .

Si ottiene in questo modo:

$$Y(s) = \frac{1}{k} \frac{k/m}{s\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{k} \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{k} F(s)$$

e, ricordando che le costanti non influenzano le operazioni di trasformazione, si deduce che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{\mathcal{L}^{-1}(F(s))}{k} = \frac{f(t)}{k}$$

essendo, nella espressione di  $f(t)$ ,  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

$$y(t) = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi\right) \right)$$
$$\phi = \arccos(\zeta), \quad \zeta < 1$$

## Trasformata di Laplace (esempio, segue)

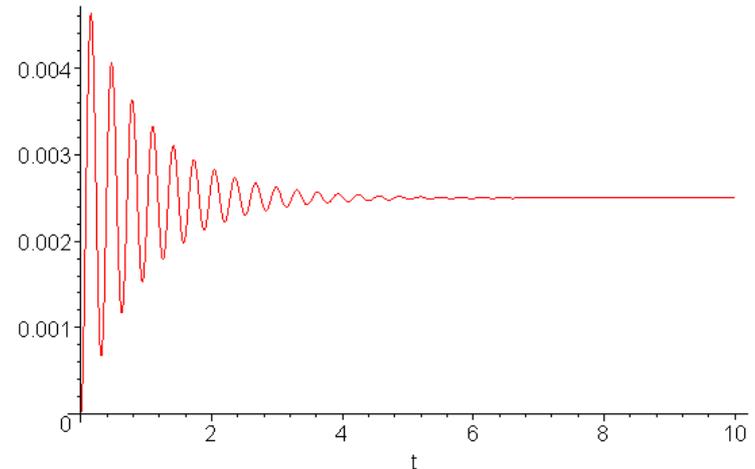
Per il nostro sistema si ha:

$m = 1 \text{ kg}$ ,  $c = 2 \text{ N/(m/s)}$ ,  $k = 400 \text{ N/m}$ , per cui:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20 \text{ rad / s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{2}{2\sqrt{400}} = \frac{2}{40} = 0.05$$

(effettuare l'analisi dimensionale, per verificare che si tratta di un numero puro)



$\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{1-0.05^2} = 0.99875$  ,  $\phi = \arccos(\zeta) = 1.521 \text{ rad}$  e  $\zeta\omega_n=1$  per cui:

$$y(t) = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \Phi) \right) = \frac{1}{400} \left( 1 - \frac{1}{0.99875} e^{-t} \sin(20 * 0.99875 t + 1.521) \right)$$

Guardando la funzione  $y(t)$ , si può osservare che:

- 1) per  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$  (come imposto dalle condizioni iniziali nulle)
- 2) per  $t = \infty$ ,  $y(t) = 1/k = 1/400 = 0.0025 \text{ m}$  (valore a regime, corrispondente alla deflessione statica di un sistema sollecitato da una forza unitaria, con una rigidezza di  $400 \text{ N/m}$ ;  
*provare se viene lo stesso risultato con il teorema del valore finale;*
- 3) come già mostrato alcune pagine fa, la soluzione trovata  $y(t)$  è composta da **due addendi**: il primo, costante (in questo caso), è una soluzione particolare dell'equazione completa e corrisponde al comportamento a **regime**; il secondo, che è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, rappresenta il comportamento **transitorio** (le oscillazioni, nel grafico) del sistema.

# Trasformata di Laplace: schema per la soluzione di equazioni differenziali lineari

- 1) Data un'equazione differenziale, del tipo considerato:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

- 2) La si trasforma, utilizzando le regole di trasformazione delle derivate, tenendo eventualmente conto delle condizioni iniziali non nulle. Ad esempio, per c.i. nulle, si ha la seguente trasformata:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = U(s)$$

da cui raccogliendo  $Y(s)$  si ottiene  $(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = U(s)$

La trasformata della risposta del sistema  $Y(s)$  sarà, pertanto:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- 3) Per ingressi  $u(t)$  semplici (quali  $t^m$ ,  $\sin(\omega t)$ ,  $e^{at}$ , o loro combinazioni, la trasformata dell'ingresso  $U(s)$  è anch'essa una funzione polinomiale di  $s$ , per cui la precedente formula, una volta sostituita esplicitamente la funzione  $U(s)$ , di solito, diventa un rapporto fra polinomi:

$$Y(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^r c_i s^i} \quad \left( \text{ad esempio} \quad Y(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \right)$$

in cui  $Num$  e  $Den$  sono due generici polinomi in  $s$ , con  $\text{grado}(Den) \geq \text{grado}(Num)$

- 4) Se trovo l'espressione in  $s$  nelle tabelle, posso fare direttamente l'antitrasformazione (v. esempio precedente),

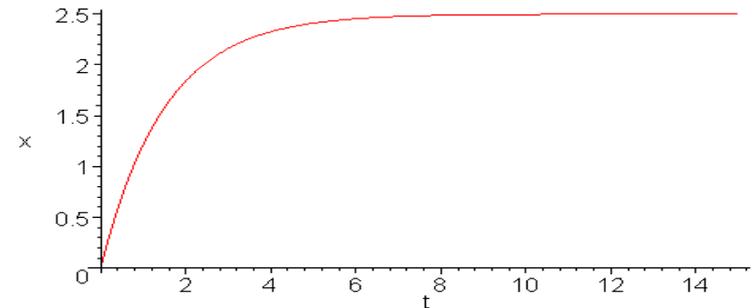
*altrimenti, che fare ?*

## Trasformata di Laplace (esempi)

Ecco alcuni problemi risolvibili con l'ausilio della trasformata di Laplace. I grafici indicano le risposte nel tempo che si devono ottenere come soluzione.

$$1.5 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 2.5 * \text{step}(t)$$

$x(0) = 0$  (suggerimento: funzione di ingresso  $u(t) = \text{step}(t)$ )



trasformando si ha:

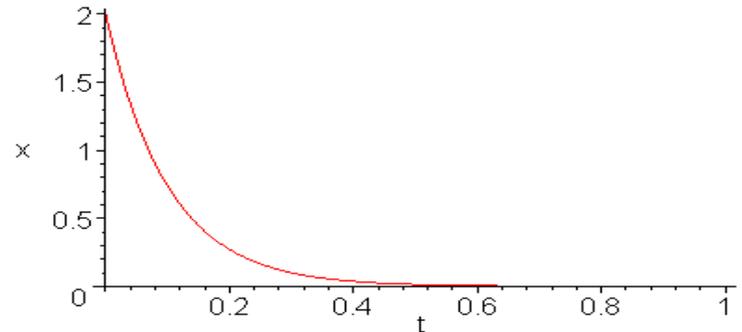
$$1.5sX(s) + X(s) = \frac{2.5}{s} \quad \text{da cui, risolvendo per } X(s) \text{ si ottiene:}$$

$$X(s) = \frac{2.5}{s(1.5s+1)} = \frac{2.5}{1.5s^2 + s} \quad (\text{una funzione di questo tipo è presente in tabella})$$

## Trasformata di Laplace (esempi)

$$a \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

$$x(0) = x_0 \quad (\text{niente forzante, solo c.i.})$$



trasformando, tenendo conto della condizione iniziale non nulla (v. regole), si ha:

$$a(sX(s) - x_0) + X(s) = 0 \quad \text{da cui, risolvendo per } X(s) \text{ si ottiene:}$$

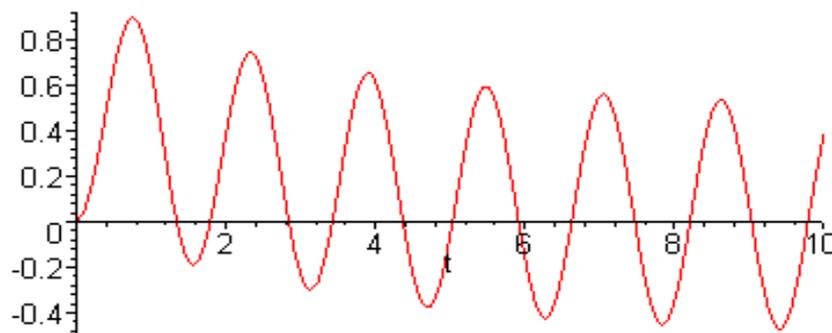
$$X(s) = \frac{ax_0}{as + 1} \quad (\text{una funzione di questo tipo è presente in tabella})$$

La curva di risposta numerica è stata ottenuta per  $a = 0.1$  e  $x_0 = 2$ .

*Supponendo che  $x(t)$  sia una velocità, quali sono le dimensioni di  $a$  ?*

## Trasformata di Laplace (esempi)

$$\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = b \sin(\omega t)$$
$$x(0) = 0$$



trasformando, si ha:

$$sX(s) + qX(s) = b \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{da cui, risolvendo per } X(s) \text{ si ottiene:}$$

$$X(s) = \frac{b\omega}{(s+q)(s^2 + \omega^2)} = \frac{b\omega}{s^3 + qs^2 + \omega^2 s + q\omega^2}$$

una funzione di questo tipo NON è presente in tabella.

La curva di risposta numerica è stata ottenuta per  $q = 0.3$ ,  $b = 2$  e  $\omega = 4$

Supponendo che  $x(t)$  sia uno spostamento, quali sono le “dimensioni” di  $q$ ,  $b$ ,  $\omega$ ?

*Come risolvo l'equazione? (e perché non è nelle tabelle?)*

## Trasformata di Laplace (esempi)

In alcuni casi, si ottengono espressioni che non si ritrovano nelle tabelle.

Si supponga, ad esempio di avere:

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

*Come faccio a calcolare  $y(t)$  ?*

Studiando l'espressione di  $Y(s)$ , si può direttamente capire qualche proprietà di  $y(t)$ , che probabilmente è la risposta di un sistema dinamico a qualche ingresso ?  
e perché certe forme sono presenti nelle tabelle mentre altre no?

Per capire, è necessario addentrarsi un po' nel mondo delle proprietà dei **polinomi a coefficienti reali**, e in quello delle funzioni rappresentate dai **rapporti** di tali polinomi.

N.B.: la trasformata di Laplace, in sostanza, consente di ridurre lo studio delle equazioni differenziali (lineari, a coefficienti costanti) nello studio delle proprietà dei polinomi e dei loro rapporti.

# Equazioni algebriche e loro radici

Per affrontare i problemi di analisi e controllo di sistemi dinamici lineari è necessario saper trattare, almeno a livello elementare, polinomi con coefficienti  $a_i$  reali e variabili complesse  $s$ , del tipo:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Ricordiamo che  $n$  è il grado del polinomio, e che  $n+1$  è il numero dei suoi coefficienti  $a_i$ . Eguagliando il polinomio a zero, si ottiene **una equazione algebrica**, di grado  $n$ , a coefficienti reali, che normalizziamo riducendo a 1 il coefficiente  $a_n$ :

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Essa ha  $n$  soluzioni (radici)  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  che possono assumere alcune forme tipiche:

- 1) **radici reali**, positive, nulle o negative:  $\lambda = \sigma$ ;
- 2) **radici complesse coniugate**  $\lambda = \sigma \pm j\omega$ ; dato che il polinomio ha coefficienti reali le radici complesse compaiono sempre in coppia, con la propria complessa coniugata:  $\lambda_i = \sigma + j\omega$  e  $\lambda_{i+1} = \sigma - j\omega$ ; come nel caso precedente, la parte reale può essere positiva, negativa o nulla;
- 3) **radici immaginarie coniugate** del tipo  $\lambda_{i,i+1} = \pm j\omega$ , nel caso di radici complesse coniugate come nel caso precedente ma con parte reale nulla.

Consegue dai punti precedenti che, se un polinomio ha **grado dispari**, esso avrà **sempre** almeno una radice reale.

Qualche volta più di una radice assume uno stesso valore:  $\lambda_i = \alpha$  e  $\lambda_{i+1} = \alpha$ ,  $\lambda_{i+2} = \alpha$ , ...; in questo caso si parla di **radici multiple**.

Ciascuna radice, di qualunque tipo sia, individua un punto nel piano  $s$  (v. pag. seguente).

# Numeri complessi e piano $s$

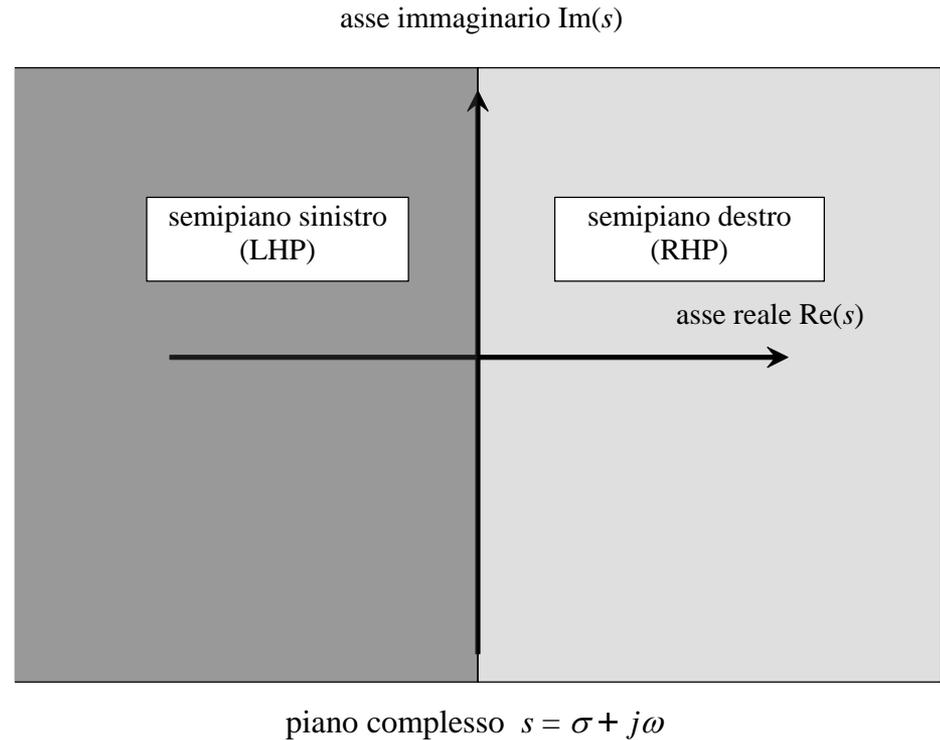
Essendo l'unità immaginaria  $j = (-1)^{1/2}$ , un numero complesso

$$s = \sigma + j\omega$$

è costituito da una parte reale  $\sigma = \text{Re}(s)$  e da una parte immaginaria,  $\omega = \text{Im}(s)$ .

Esso è pertanto rappresentabile con un punto in un piano, rispetto a un sistema di riferimento, avendo come coordinata  $x$  la sua parte reale  $\text{Re}(s)$  e come coordinata  $y$  la sua parte immaginaria  $\text{Im}(s)$ : tale piano è detto **piano complesso** o **piano  $s$**  (v. figura sottostante).

E' utile ricordare che l'asse immaginario divide il piano  $s$  in due semipiani, quello destro (RHP, *Right Half Plane*) corrispondente a valori positivi della parte reale  $\sigma$  di  $s$ , e quello sinistro (LHP, *Left Half Plane*) corrispondente a valori negativi di  $\sigma$ .



## Numeri complessi e piano $s$

Essendo  $s = \sigma + j\omega$  un punto nel piano complesso, esso individua anche un vettore che parte dall'origine e termina in  $s$ .

Tale vettore avrà, come già detto, componenti  $[x, y] = [\sigma, \omega]$ , ma anche:

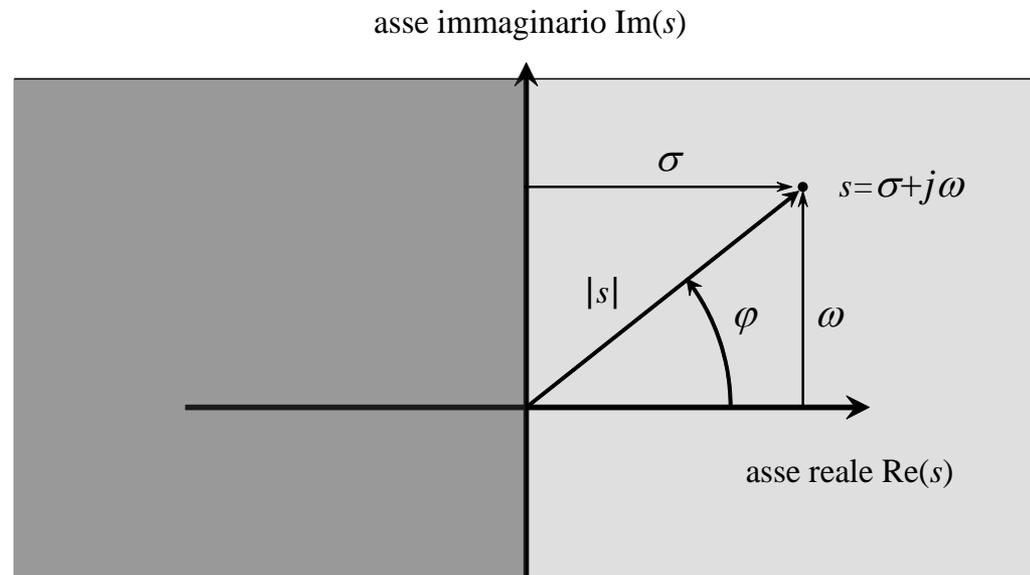
- modulo:  $|s| = (\text{Re}(s)^2 + \text{Im}(s)^2)^{1/2} = (\sigma^2 + \omega^2)^{1/2}$
- fase:  $\varphi = \angle s = \text{atan}(\text{Im}(s) / \text{Re}(s)) = \text{atan}(\omega / \sigma)$

Noti modulo  $|s|$  e fase  $\varphi = \angle s$  del numero (vettore)  $s$ , le sue componenti cartesiane  $[x, y] = [\sigma, \omega]$  si ottengono con la classica formula  $[x, y] = [\sigma, \omega] = [|s| \cos(\varphi), |s| \sin(\varphi)]$ .

Un numero complesso si dice *immaginario* se la sua parte reale  $\sigma$  è nulla:

$$s = j\omega$$

Un numero immaginario ha fase  $90^\circ$  o  $270^\circ$  (vettore con la sola componente  $y$  diversa da zero), a seconda che sia positivo o negativo.



piano complesso  $s = \sigma + j\omega$

# Numeri complessi e piano $s$

Le operazioni aritmetiche fra numeri complessi sono definite nel seguente modo:

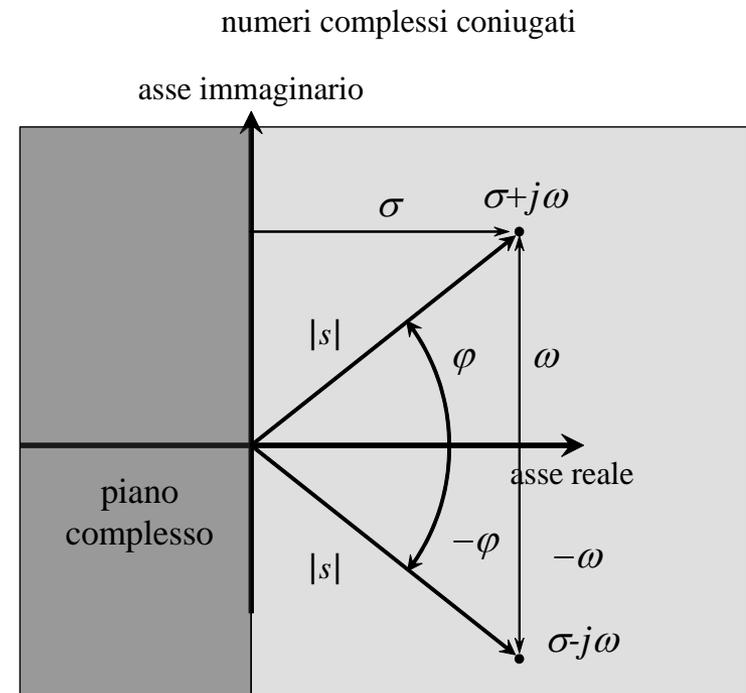
- 1) addizione:  $s_1 + s_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$
- 2) sottrazione:  $s_1 - s_2 = (\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2)$
- 3) moltiplicazione: il numero  $s_{12} = s_1 * s_2$  ha modulo  $|s_{12}| = |s_1||s_2|$   
e fase  $\angle s_{12} = \varphi_{12} = \angle s_1 + \angle s_2 = \varphi_1 + \varphi_2$
- 4) divisione: il numero  $s_{12} = s_1 / s_2$  ha modulo  $|s_{12}| = |s_1| / |s_2|$  e fase  $\angle s_{12} = \varphi_{12} = \angle s_1 - \angle s_2 = \varphi_1 - \varphi_2$
- 5) moltiplicazione per un numero reale  $a$ :  $s_1 = a s = a\sigma + ja\omega$ , per cui  $\sigma_1 = a\sigma$  e  $\omega_1 = a\omega$
- 6) divisione per un numero reale  $a$ :  $s_1 = s / a = \sigma / a + j\omega / a$ , per cui  $\sigma_1 = \sigma / a$  e  $\omega_1 = \omega / a$

Nota: la 3 e la 4 derivano immediatamente dalla formula di Eulero  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

Due numeri complessi si dicono *coniugati* se hanno la stessa parte reale e parti immaginarie di segno opposto:  $s_1 = \sigma + j\omega$  e  $s_2 = \sigma - j\omega$  sono complessi coniugati.

I numeri complessi coniugati hanno alcune proprietà:

- il loro modulo è lo stesso;
- la loro fase è opposta:  $\varphi_1 = -\varphi_2$
- la loro somma è il numero reale  $2\sigma$
- la loro differenza è il numero immaginario  $2j\omega$



## Esempi di polinomi a coefficienti reali

Consideriamo il polinomio  $s^2 - 6s + 25$ ; le sue radici, che si possono calcolare analiticamente con la classica formula delle equazioni di II grado, sono  $\lambda_1 = 3 + 4j$ ,  $\lambda_2 = 3 - 4j$ : esse sono pertanto complesse coniugate a parte reale positiva.

Il polinomio:  $s^5 - 12s^4 + 65s^3 - 198s^2 + 244s - 600$  ha radici che non si possono calcolare analiticamente. Tuttavia con strumenti numerici, quali MATLAB, è immediato scoprire che le sue radici sono: sono  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 3 + 4j$ ,  $\lambda_3 = 3 - 4j$ ,  $\lambda_4 = 2j$ ,  $\lambda_5 = -2j$  (una reale positiva, due complesse coniugate a parte reale positiva e due immaginarie coniugate).

Una volta ottenute le radici di un polinomio, la sua espressione può essere riformulata (fattorizzata) come prodotto di termini elementari:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\dots(s - \lambda_n)$$

Tornando ai due polinomi esempio, essi saranno:

$$s^2 - 6s + 25 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s - 3 - 4j)(s - 3 + 4j)$$

e per il secondo:

$$\begin{aligned} s^5 - 12s^4 + 65s^3 - 198s^2 + 244s - 600 &= \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4)(s - \lambda_5) = \\ &= (s - 6)(s - 3 - 4j)(s - 3 + 4j)(s - 2j)(s + 2j) \end{aligned}$$

*Si noti che le espressioni coinvolgono numeri complessi, ma che il risultato finale è un polinomio a coefficienti reali, a causa della presenza delle radici complesse in forma di coppie coniugate.*

## Fattorizzazione equazioni polinomiali: termini quadratici

L'espressione fattorizzata di un polinomio può essere utilmente espressa in termini di soli fattori *reali* (cioè senza coinvolgere i numeri complessi anche in presenza di radici complesse) effettuando il prodotto delle coppie di fattori di primo grado contenenti le coppie di radici coniugate.

Infatti, per una coppia di radici coniugate, ad esempio denominate  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si avrà:  $\lambda_1 = \text{Re} + j\text{Im}$   $\lambda_2 = \text{Re} - j\text{Im}$ . I rispettivi fattori possono essere trasformati in una espressione reale contenente *termini quadratici*, funzione delle parti reali e immaginarie delle radici coniugate:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s - \text{Re} - j\text{Im})(s - \text{Re} + j\text{Im}) = s^2 - 2\text{Re} s + (\text{Re}^2 + \text{Im}^2)$$

*Dimostrazione, come esercizio di operazioni con numeri complessi:*

$$\begin{aligned}(s - \text{Re} - j\text{Im})(s - \text{Re} + j\text{Im}) &= \\ &= s^2 - s \text{Re} + s j \text{Im} - \text{Re} s + \text{Re}^2 - \text{Re} j \text{Im} - j \text{Im} s + j \text{Im} \text{Re} - j^2 \text{Im}^2 = \\ &= s^2 - 2\text{Re} s + (\text{Re}^2 + \text{Im}^2)\end{aligned}$$

*(avendo ricordato che  $j^2 = -1$ )*

## Fattorizzazione equazioni polinomiali: termini quadratici

Questa forma può essere ulteriormente modificata, per ottenere una rappresentazione correlata a parametri normalizzati. Per una coppia di radici complesse coniugate, ponendo:

$$\omega_n = (\text{Re}^2 + \text{Im}^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \zeta = -\text{Re} / \omega_n$$

l'equazione precedente ( $s^2 - 2\text{Re} s + (\text{Re}^2 + \text{Im}^2)$ ) può essere trasformata in:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

*Esercizio:* scrivere il polinomio  $s^4 - 5s^3 + 13s^2 + 61s - 150$ , che ha le seguenti radici:

$\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = -3$ ;  $\lambda_3 = 3 + 4j$ ;  $\lambda_4 = 3 - 4j$ , come prodotti di fattori con coefficienti reali.

*Soluzione:* esso potrà essere espresso in forma fattorizzata nei due modi seguenti:

$$s^4 - 5s^3 + 13s^2 + 61s - 150 = (s - 2)(s + 3)(s - 3 - 4j)(s - 3 + 4j) = (s - 2)(s + 3)(s^2 - 6s + 25)$$

e pertanto, per il termine quadratico avrà  $\omega_n = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 25^{1/2} = 5$  e  $\zeta = -3/5 = -0.6$ .

## Fattorizzazione equazioni polinomiali: forma generale

D'ora in avanti, in presenza radici complesse o immaginarie coniugate, l'espressione fattorizzata adottata per un generico polinomio sarà la seguente:

$$\begin{aligned} s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 &= \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\dots(s^2 + 2\zeta_i\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)\dots(s - \lambda_n) \end{aligned}$$

$$\text{con } \omega_{ni}^2 = \text{Re}_i^2 + \text{Im}_i^2 \text{ e } \zeta_i = -\frac{\text{Re}_i}{\omega_{ni}}$$

essendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  radici reali

e  $\lambda_i = \text{Re}_i + j\text{Im}_i$  e  $\lambda_{i+1} = \text{Re}_i - j\text{Im}_i$

una coppia di radici complesse coniugate.

## Rapporti fra polinomi

Come vedremo, nel trattamento dei problemi di dinamica e controllo, ci si trova spesso nella necessità di dover trattare funzioni  $Y(s)$  formate da rapporti fra polinomi nella variabile  $s$ , del tipo:

$$Y(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (a_n = 1)$$

in cui  $Num$  e  $Den$  sono due polinomi in  $s$ , con grado  $(Den) \geq$  grado  $(Num)$ .

Ammettendo di conoscere il valore delle radici  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  del polinomio a denominatore  $Den(s)$ , è possibile esprimere tale polinomio come prodotto di termini elementari secondo quanto espresso nella pagina precedente (nel seguito si ammette, per semplicità di trattazione, di non avere radici multiple, cioè  $\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1, \dots, n$ ):

$$Den(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)$$

## Rapporti fra polinomi (scomposizione in addendi elementari)

da cui, effettuando un ulteriore passaggio di scomposizione della frazione originaria, si può ottenere (non dimostrato qui):

$$Y(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{Num(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)} = \frac{C_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{C_2}{(s - \lambda_2)} + \dots + \frac{C_n}{(s - \lambda_n)}$$

dove il generico coefficiente  $C_k$  è dato dalla seguente espressione:

$$C_k = \frac{Num(\lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)}$$

ovvero:

$$C_k = \left[ (s - \lambda_k) Y(s) \right]_{s=\lambda_k}$$

In conclusione, un rapporto fra due polinomi può essere scomposto in una somma di  $n$  termini, il cui denominatore è un polinomio di primo grado contenente una delle radici  $\lambda$  di  $Den(s)$ , mentre il numeratore è una costante calcolabile con la relazione soprastante. In caso di radici  $\lambda$  complesse, i coefficienti  $C_k$  saranno complessi. Tuttavia, con procedura simile a quella del trasparente precedente, anche in questo caso, combinando due termini di una stessa radice complessa, si possono ottenere espressioni con soli numeri reali. In caso di radici multiple, la procedura è applicabile, ma richiede l'uso di relazioni più generali.

## Rapporti fra polinomi (esercizio di scomposizione)

Data la funzione 
$$Y(s) = \frac{10s^2 + 155s + 75}{s^4 + 161s^3 + 6660s^2 + 56500s + 50000}$$

trovare la sua scomposizione (le radici sono:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -10$ ,  $\lambda_3 = -100$ ,  $\lambda_4 = -50$ )

$$Y(s) = \frac{Num(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4)} = \frac{C_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{C_2}{(s - \lambda_2)} + \frac{C_3}{(s - \lambda_3)} + \frac{C_4}{(s - \lambda_4)}$$

---

$$C_1 = \frac{Num(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} = \frac{10 - 155 + 75}{(-1 + 10)(-1 + 100)(-1 + 50)} = -0.001603$$

$$C_2 = \frac{Num(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{1000 - 1550 + 75}{(-10 + 1)(-10 + 100)(-10 + 50)} = 0.01466$$

$$C_3 = \frac{Num(\lambda_3)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} = \frac{100000 - 15500 + 75}{(-100 + 1)(-100 + 10)(-100 + 50)} = -0.18984$$

$$C_4 = \frac{Num(\lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} = \frac{25000 - 7750 + 75}{(-50 + 1)(-50 + 10)(-50 + 100)} = 0.17678$$

---

Il file MATLAB *Es\_scomp\_polin.m* permette di calcolare i coefficienti  $C_k$  dell'esempio con le formule esplicite (in seguito vedremo anche come si fa con il comando *residue*).

## Rapporti fra polinomi (radici complesse coniugate)

Nel caso di una coppia di radici c. c.  $\lambda_{k,k+1} = \sigma \pm j\omega$ , per trovare le espressioni delle espansioni si procede come nel caso precedente, solo che i due coefficienti  $C_k$  e  $C_{k+1}$  risulteranno, a loro volta, complessi coniugati (qui non dimostrato):

$$T_k = \frac{C_k}{s - (\sigma + j\omega)} = \frac{k_r + jk_i}{s - (\sigma + j\omega)} \quad T_{k+1} = \frac{C_{k+1}}{s - (\sigma - j\omega)} = \frac{k_r - jk_i}{s - (\sigma - j\omega)}$$

Sommando i due termini si ottiene un'espressione a coefficienti reali, con denominatore quadratico e numeratore lineare in  $s$  (si può verificare per esercizio):

$$2 \frac{k_r s - (k_r \sigma + k_i \omega)}{(s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2)}$$

Tale termine può essere riscritto nella seguente forma (si può verificare per esercizio, ma non è necessario saperla a memoria):

$$Y(s) = K \frac{s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

$$K = 2k_r \quad \beta = -\frac{(k_r \sigma + k_i \omega)}{k_r}$$

La forma finale ottenuta è antitrasformabile con una formula data nella tabella delle trasformate.

## Rapporti fra polinomi (radici multiple)

In presenza di una radice doppia  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$  la formula di scomposizione cambia, diventando:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{Num(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_k)(s - \lambda_k) \dots (s - \lambda_n)} = \\ &= \frac{C_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{C_2}{(s - \lambda_2)} \dots \frac{C_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{C_{k+1}}{(s - \lambda_k)^2} \dots + \frac{C_n}{(s - \lambda_n)} \end{aligned}$$

La formula per calcolare  $C_k$  cambia (non discusso analiticamente).

Comunque, le radici multiple fanno comparire addendi del tipo:

$$Y(s) = \dots \frac{C_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{C_{k+1}}{(s - \lambda_k)^2} + \frac{C_{k+2}}{(s - \lambda_k)^3} \dots$$

Anche per questo caso, le tabelle forniscono le informazioni per l'antitrasformazione.

Non viene discusso esplicitamente il caso di radici multiple complesse coniugate.

## Rapporti fra polinomi: sintesi

In conclusione, una funzione costituita dal rapporto di due polinomi a coefficienti reali può essere trasformata in una somma di  $n$  addendi (dove  $n$  è il grado del denominatore della frazione):

$$Y(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{Num(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_k)(s - \lambda_k) \dots (s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega) \dots (s - \lambda_n)} =$$

$$= \frac{C_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{C_2}{(s - \lambda_2)} + \dots + \frac{C_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{C_{k+1}}{(s - \lambda_k)^2} + \dots + K \frac{s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \dots + \frac{C_n}{(s - \lambda_n)}$$

Ciascun addendo appartiene a una categoria dipendente dal tipo della radice del denominatore a cui è associato (*non è discusso il caso di radici complesse coniugate multiple*):

- radici reali semplici  $\lambda_k$   $\frac{C_k}{(s - \lambda_k)}$
- radici reali multiple  $\lambda_k, \lambda_k, \dots$   $\frac{C_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{C_{k+1}}{(s - \lambda_k)^2} + \frac{C_{k+2}}{(s - \lambda_k)^3} + \dots$
- radici complesse coniugate  $(\sigma \pm j\omega)$   $K \frac{s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$

## Rapporti fra polinomi: antitrasformazione

Supponendo che la funzione costituita dal rapporto di due polinomi a coefficienti reali rappresenti la trasformata di Laplace di una funzione di cui si cerca l'andamento nel tempo, la scomposizione in addendi fornisce un metodo generale di antitrasformazione.

Infatti, ogni tipo di termine è presente nella tabella delle trasformate:

$$\begin{array}{ll} \frac{C_k}{(s - \lambda_k)} & C_k e^{\lambda_k t} \\ \frac{C_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{C_{k+1}}{(s - \lambda_k)^2} & C_k e^{\lambda_k t} + C_{k+1} t e^{\lambda_k t} \\ \frac{s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} & \frac{1}{\omega} \left[ (\beta + \sigma)^2 + \omega^2 \right]^{1/2} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi) \\ \phi = \arctan \frac{\omega}{\beta + \sigma} & \end{array}$$

*Questo ci dice che la tipica risposta di un sistema lineare a coefficienti costanti potrà essere composta dal contributo di: esponenziali, prodotti esponenziali-polinomi, prodotti esponenziali-funzioni armoniche.*

A ciascuna di queste forme matematiche è associabile un preciso comportamento riscontrabile nei sistemi reali.

## Rapporti fra polinomi: antitrasformazione

Due casi particolari vanno citati per il loro interesse applicativo e di comprensione:

- radice reale nulla
- coppia di radici immaginarie pure

Le formule della pagina precedente si particolarizzano:

$$\frac{C_k}{(s - \lambda_k)} \quad (\text{per } \lambda_k = 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{C_k}{s} \quad C_k e^{\lambda_k t} \quad \Rightarrow \quad C_k$$

$$\frac{s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \quad (\text{per } \sigma = 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{s + \beta}{s^2 + \omega^2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{\omega} \left[ (\beta + \sigma)^2 + \omega^2 \right]^{1/2} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \left[ \beta^2 + \omega^2 \right]^{1/2} \sin(\omega t + \phi)$$

1. la presenza di una *radice nulla* a denominatore implica una **costante** nel dominio del tempo;
2. la presenza di una *coppia di radici immaginarie pure*, implica nel dominio del tempo la presenza di **termini oscillatori non decrescenti** nel tempo (casi di oscillazioni libere non smorzate o oscillazioni forzate con forzante sinusoidale, vedi es. pag. 42).

## Trasformata di Laplace (esempio interrotto a pag. 42)

$$\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = b \sin(\omega t)$$

$$x(0) = 0 \quad \text{trasformando, si ha:}$$

$$sX(s) + qX(s) = b \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{da cui, risolvendo per } X(s) \text{ si ottiene:}$$

$$X(s) = \frac{b\omega}{(s+q)(s^2 + \omega^2)} = \frac{b\omega}{(s+q)(s+j\omega)(s-j\omega)} =$$

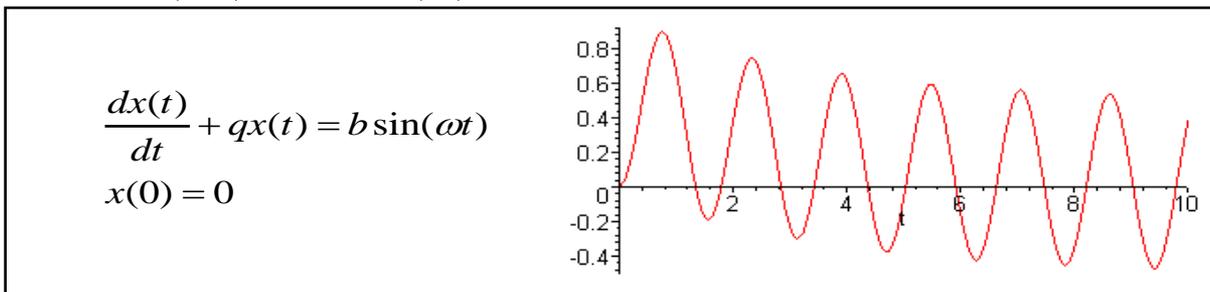
$$= \frac{k_1}{(s+q)} + \frac{k_{2-}}{(s+j\omega)} + \frac{k_{2+}}{(s-j\omega)} = \frac{k_1}{(s+q)} + k_2 \frac{s+\beta}{s^2 + \omega^2}$$

$$k_1 = \frac{b\omega}{(q^2 + \omega^2)} \quad k_2 = \frac{-b\omega}{(q^2 + \omega^2)} \quad \beta = -q$$

$$X(s) = \frac{b\omega}{(q^2 + \omega^2)} \left[ \frac{1}{(s+q)} - \frac{s-q}{(s^2 + \omega^2)} \right] \text{ e antitrasformando si ottiene:}$$

$$x(t) = \frac{b\omega}{(q^2 + \omega^2)} \left[ e^{-qt} + \frac{\sqrt{(q^2 + \omega^2)}}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \right]$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\omega}{q}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{q}\right)$$



NB: i passaggi matematici qui a fianco, che si possono verificare per esercizio, evidenziano che, in questo caso, la presenza nel denominatore della  $X(s)$  di una coppia di radici immaginarie coniugate dipende direttamente dalla presenza di una funzione forzante sinusoidale, che implica, a sua volta, una risposta a regime sinusoidale.

La curva di risposta numerica è stata ottenuta per  $q = 0.3$ ,  $b = 2$  e  $\omega = 4$ . Supponendo che  $x(t)$  sia uno spostamento, quali sono le dimensioni di  $q$ ,  $b$ ,  $\omega$ ?

## Rapporti fra polinomi: esercizi

Esercizio:

trovare le espressioni delle espansioni per le seguenti funzioni:

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\text{soluzione: } Y(s) = \frac{7}{(s + 2)} + \frac{-4}{(s + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{10s + 1}{s^2 + s + 10}$$

$$\text{soluzione: } Y(s) = \frac{5 - 0.64j}{(s + 0.5 + 3.12j)} + \frac{5 + 0.64j}{(s + 0.5 - 3.12j)}$$

Esercizio:

fare il passaggio inverso, dalle espansioni ai rapporti di polinomi di partenza.

## Matlab: definizioni di polinomi

Il modo più semplice per definire un polinomio in Matlab è quello di definire un vettore che ne contiene i coefficienti, ordinati in ordine decrescente rispetto alle potenze della variabile:

$$Pol(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

In Matlab sarà (ovviamente i coefficienti saranno *numeri*):

$$> \text{coe\_a} = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$$

$$> \text{coe\_b} = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]$$

Per calcolare le radici del polinomio basta usare il comando *roots(pol)*; nel nostro caso:

$$> \text{roots}(\text{coe\_a})$$

Per calcolare il prodotto di due polinomi, si usa il comando *conv(pol1,pol2)*:

$$> \text{conv}(\text{coe\_a}, \text{coe\_b})$$

*Esempio:*  $Pol(s) = 23s^5 + 13s^4 + 10s^3 + 5.5s^2 + 127s + 13$ ; in Matlab si avrà:

$$> \text{coe} = [23 \ 13 \ 10 \ 5.5 \ 127 \ 13]$$

$$> \text{roots}(\text{coe})$$

*ans* =

$$-1.16161102177433 + 1.10382723744196i$$

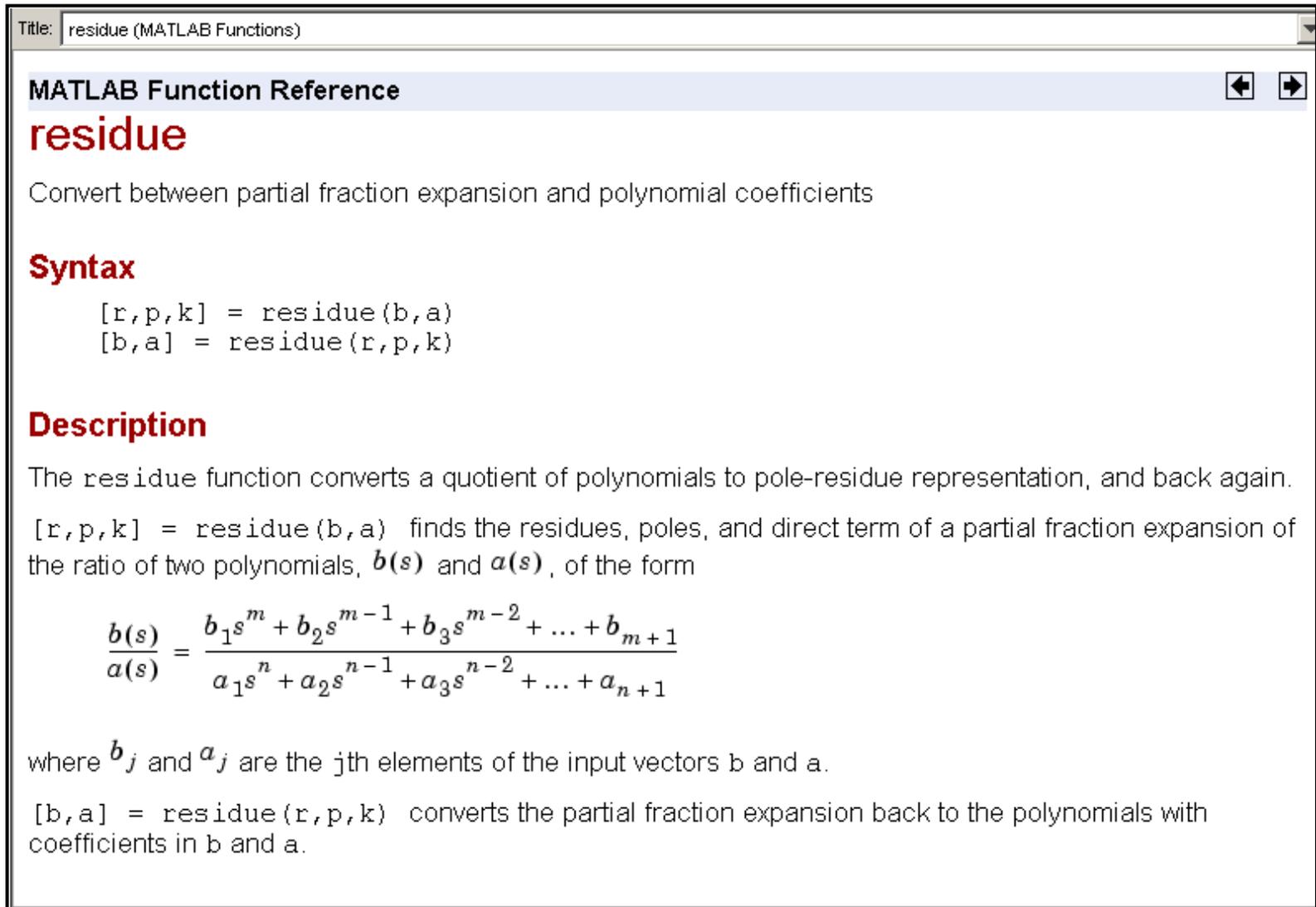
$$-1.16161102177433 - 1.10382723744196i$$

$$0.93037397394415 + 1.12996755641946i$$

$$0.93037397394415 - 1.12996755641946i$$

$$-0.10274329564399$$

# Fattorizzazione equazioni polinomiali: comando *residue* di Matlab (1)



The screenshot shows a window titled "residue (MATLAB Functions)" with a header "MATLAB Function Reference". The main content is for the "residue" function, which is used to convert between partial fraction expansion and polynomial coefficients.

**residue**

Convert between partial fraction expansion and polynomial coefficients

**Syntax**

```
[r,p,k] = residue(b,a)
[b,a] = residue(r,p,k)
```

**Description**

The `residue` function converts a quotient of polynomials to pole-residue representation, and back again.

`[r,p,k] = residue(b,a)` finds the residues, poles, and direct term of a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials,  $b(s)$  and  $a(s)$ , of the form

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \dots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \dots + a_{n+1}}$$

where  $b_j$  and  $a_j$  are the  $j$ th elements of the input vectors `b` and `a`.

`[b,a] = residue(r,p,k)` converts the partial fraction expansion back to the polynomials with coefficients in `b` and `a`.

## Fattorizzazione equazioni polinomiali: comando *residue* di Matlab (2)

### Definition

If there are no multiple roots, then

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n} + k(s)$$

The number of poles  $n$  is

$$n = \text{length}(a) - 1 = \text{length}(r) = \text{length}(p)$$

The direct term coefficient vector is empty if  $\text{length}(b) < \text{length}(a)$ ; otherwise

$$\text{length}(k) = \text{length}(b) - \text{length}(a) + 1$$

If  $p(j) = \dots = p(j+m-1)$  is a pole of multiplicity  $m$ , then the expansion includes terms of the form

$$\frac{r_j}{s-p_j} + \frac{r_{j+1}}{(s-p_j)^2} + \dots + \frac{r_{j+m-1}}{(s-p_j)^m}$$

### Arguments

$b, a$  Vectors that specify the coefficients of the polynomials in descending powers of  $s$

$r$  Column vector of residues

$p$  Column vector of poles

$k$  Row vector of direct terms

# Funzione di trasferta $G(s)$

Abbiamo visto in precedenza (ad esempio nel caso del serbatoio) che un'equazione differenziale esprime la relazione fra un segnale di ingresso  $u(t)$  e un segnale di uscita  $y(t)$



Questa relazione può essere espressa anche in forma "trasformata", nel seguente modo:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

essa, per condizioni iniziali nulle si trasforma in:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

da cui raccogliendo  $Y(s)$  e  $U(s)$  si ottiene:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

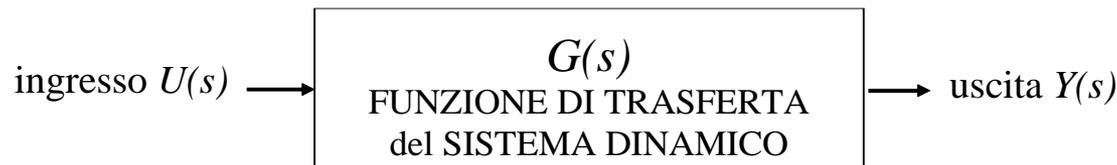
La trasformata della risposta del sistema  $Y(s)$  sarà pertanto:

$$Y(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} U(s) = G(s) U(s)$$

La FUNZIONE DI TRASFERTA DEL SISTEMA  $G(s)$

esprime la relazione fra la trasformata dell'ingresso e quella dell'uscita:

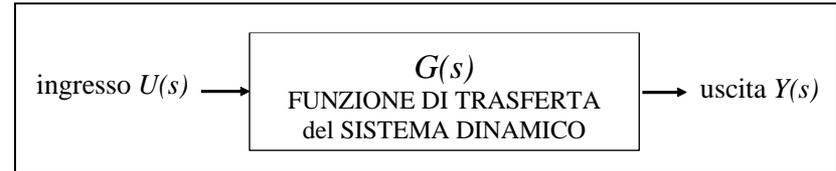
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}$$



## Funzione di trasferta $G(s)$

La funzione di trasferta esprime le proprietà di un sistema dinamico (il serbatoio, un sistema vibrante, una turbina, un veicolo), indipendentemente da quelle che saranno effettivamente le funzioni di ingresso e uscita. Avendo normalizzato, per comodità, la forma della  $G(s)$  rendendo unitario il coefficiente  $a_n$ , si ottiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}$$



Ricordando che la trasformata della funzione impulso  $\delta(t)$  è unitaria, cioè (v. tabelle):  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  e supponendo di applicare ad un sistema dinamico un ingresso impulsivo, cioè  $u(t) = \delta(t)$ , si ha che:

$$Y_{IMPULSO}(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

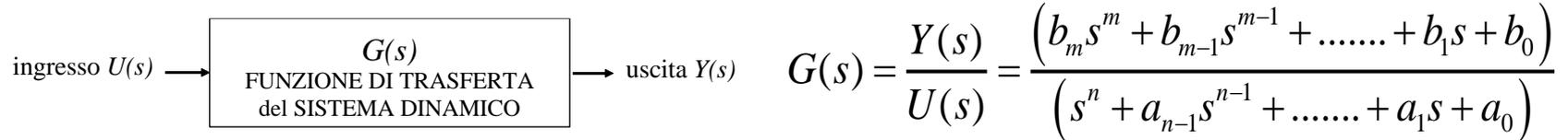
**Cioè: la funzione di trasferta  $G(s)$  coincide con la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo.**

N.B.: questa proprietà della  $G(s)$  è molto utilizzata per la determinazione sperimentale della funzione di trasferta di sistemi complessi.

Pertanto, ricordando quanto detto nelle pagine precedenti, si può affermare che:

- antitrasformando la funzione di trasferta di un sistema, si ottiene la sua risposta all'impulso, espressa nel tempo;
- dal momento che la f.t. è costituita da un rapporto fra polinomi, valgono le procedure descritte precedentemente e, in conclusione, la risposta all'impulso avrà la forma già discussa. Essendo  $\{\lambda_i, i=1, \dots, n\}$  le radici del denominatore di  $G(s)$ , esso può essere scomposto in una somma di frazioni elementari che si antitrasformano in una somma di esponenziali, o di prodotti di esponenziali e polinomi e funzioni armoniche.

## Risposta di un sistema



In conclusione, la risposta di un sistema dinamico è direttamente dipendente dalla soluzione del suo denominatore, cioè della sua equazione caratteristica ed, in assenza di radici multiple, è formata da una somma di termini di due tipi, corrispondenti rispettivamente alle radici reali e a quelle complesse coniugate.

1) Per quanto riguarda le radici reali, esse producono addendi del tipo:

$$C / (s - \lambda) \quad \text{la cui antitrasformata è } Ce^{\lambda t}$$

2) Per quanto riguarda le radici complesse coniugate, esse producono addendi del tipo:

$$\frac{C_+}{(s - \lambda_+)} + \frac{C_-}{(s - \lambda_-)} = \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

la cui antitrasformata è del tipo:

$$\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a}$$

In conclusione, la risposta nel tempo di un sistema dinamico per ingresso impulsivo sarà la somma di termini di tipo esponenziale puro e esponenziale-armonico misto, a seconda natura delle radici della sua equazione caratteristica.

Questi due tipi di risposte corrispondono alle tipiche risposte dei sistemi del primo e secondo ordine (sottosmorzato), le cui proprietà è interessante approfondire, in quanto rappresentative delle risposte di sistemi più generali.

Vedi file *risposta sistemi I e II ordine*

## Funzione di trasferta, poli, zeri e stabilità

La funzione di trasferta è rappresentata dal rapporto fra due polinomi in  $s$ , denominati  $Num(s)$  e  $Den(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}$$

Si ricorda che il **grado**  $n$  del polinomio  $Den(s)$  corrisponde all' **ordine** dell'equazione differenziale che rappresenta il sistema dinamico considerato.

Inoltre sono chiamati **poli** del sistema le radici della seguente equazione algebrica nella variabile  $s$  (radici del denominatore), detta anche **equazione caratteristica del sistema** (la abbiamo già nominata in passato, ma ora è definita rigorosamente):

$$Den(s) = 0$$

Mentre sono chiamati **zeri** del sistema le radici dell'equazione algebrica nella variabile  $s$  (radici del numeratore):

$$Num(s) = 0$$

Nelle pagine precedenti, i poli dei sistemi considerati sono stati rappresentati con il simbolo  $\{\lambda_i, i=1,n\}$ .

*Essi sono, ovviamente, in numero pari al grado  $n$  del polinomio  $Den(s)$ , che è l' **ordine** del sistema.*

*Essi determinano le proprietà di **stabilità** di un sistema, in quanto definiscono gli esponenti degli esponenziali della risposta del sistema stesso. Infatti:*

$$y_{IMPULSO}(t) = \left( \bar{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \bar{C}_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta_j^2} \omega_{nj} t\right) + \dots \right)$$

in cui  $-\zeta_j \omega_{nj}$  è proprio la parte reale dei poli complessi coniugati  $j, j+1$

# Funzione di trasferta, poli, zeri e stabilità

Esistono molte possibili definizioni della **stabilità** di un sistema.

Noi assumeremo la definizione normalmente chiamata *stabilità ingresso limitato – uscita limitata*, in inglese *Bounded Input – Bounded Output Stability*, cioè *BIBO Stability*.

Questa definizione dice che

**un SISTEMA è STABILE se genera un'uscita limitata per qualunque ingresso limitato.**

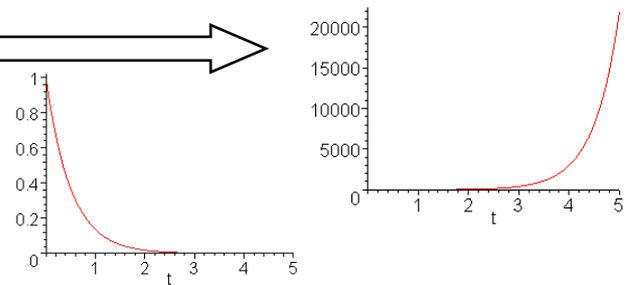
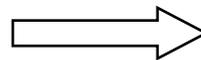
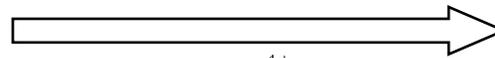
Prendiamo, ad esempio, un sistema del I ordine, soggetto a un ingresso impulsivo:  $y'(t) + ay(t) = \delta(t)$

La sua risposta nel tempo, per c.i. nulle, coinciderà con l'antitrasformata della sua  $G(s)$ , che è:  $G(s) = \frac{1}{s + a}$

Questo sistema ha un solo polo  $\lambda$ , che è un numero reale, ottenuto risolvendo l'equazione caratteristica  $Den(s) = s + a = 0$ , da cui  $\lambda = -a$ . Antitrasformando per mezzo delle tabelle si ottiene:  $y(t) = e^{\lambda t} = e^{-at}$

1) per  $a < 0$ , cioè per  $\lambda > 0$ , la soluzione tende a  $\infty$ , e di conseguenza il sistema è instabile;

2) per  $a > 0$ , cioè per  $\lambda < 0$ , la soluzione tende a 0, ma purtroppo, questa singola risposta NON dimostra che il sistema sia stabile (anche se lo è, in effetti).



## IMPORTANTE:

In generale, per i sistemi lineari tempoinvarianti, si può dimostrare che:

- 1) il sistema è **BIBO stabile** se tutte le radici della sua equazione caratteristica, cioè tutti i suoi **poli**, hanno **parte reale negativa**;
- 2) il sistema è **BIBO instabile** se anche uno solo dei suoi **POLI** ha **parte reale positiva**;
- 3) il sistema è **BIBO instabile** se anche uno solo dei suoi **POLI** ha **parte reale nulla**; tuttavia, qualche volta, i sistemi con tutti i poli a parte reale negativa tranne alcuni a parte reale nulla sono detti **al limite di stabilità**.

## Comandi di base di Matlab per lo studio delle funzioni di trasferta (1)

La definizione di una funzione di trasferta definita come rapporto fra polinomi è ottenibile in diversi modi; nel seguito sarà utilizzato solo il comando *tf*, che ha la seguente sintassi:

$$\textit{nomefunzione} = \textit{tf}(\textit{numer}, \textit{denom})$$

in cui *numer* e *denom* sono rispettivamente i coefficienti dei due polinomi a numeratore e denominatore, a partire dal coefficiente di grado più alto. Il numero di tali coefficienti sarà pari al grado del polinomio +1. Dal punto di vista operativo, tali coefficienti rappresentano in Matlab un vettore, e sono pertanto rappresentabili con la sintassi (ad esempio per la variabile *numer*):

$$\textit{numer} = [7 \ 3 \ -5 \ 1]$$

Questa sintassi definisce, pertanto, i coefficienti del polinomio  $7s^3 + 3s^2 - 5s + 1$ .

Come esempio, avendo già definito come sopra la variabile *numer*, il comando:

$$\textit{ga} = \textit{tf}(\textit{numer}, [9 \ 2 \ 5 \ 1 \ 6])$$

ottiene, in Matlab, il seguente output:

Transfer function:

$$7 s^3 + 3 s^2 - 5 s + 1$$

-----

$$9 s^4 + 2 s^3 + 5 s^2 + s + 6$$

(ovviamente anche per il denominatore si poteva prima definire un vettore).

*N.B: i comandi in corsivo sono comandi con la sintassi di Matlab; gli studenti sono invitati a provarli, con eventuali variazioni, al fine di sperimentare direttamente le funzioni di questo software.*

## Comandi di base di Matlab per lo studio delle funzioni di trasferta (2)

Una volta definita una funzione di trasferta è possibile calcolarne i poli con il comando

*pole(transfer\_function)*

cioè, ad esempio, per la F.T. di pagina precedente (ga), si ottiene:

*pole(ga)*

```
ans =  
-0.5779 + 0.7190i  
-0.5779 - 0.7190i  
0.4667 + 0.7521i  
0.4667 - 0.7521i
```

Analogamente, con il comando *zero(transfer\_function)* si ottengono gli zeri della funzione di trasferta, ad esempio:

*zero(ga)*

```
ans =  
-1.1545  
0.4523  
0.2736
```

In sostituzione del comando *pole*, si può usare il comando *damp* che, oltre ai poli, fornisce, per ciascuno di essi, anche i valori dei parametri  $z$  e  $w_n$  (significativi solo per i poli complessi coniugati):

*damp(ga)*

| Eigenvalue              | Damping    | Freq. (rad/s) |
|-------------------------|------------|---------------|
| +4.67e-001 + 7.52e-001i | -5.27e-001 | 8.85e-001     |
| +4.67e-001 - 7.52e-001i | -5.27e-001 | 8.85e-001     |
| -5.78e-001 + 7.19e-001i | +6.26e-001 | 9.22e-001     |
| -5.78e-001 - 7.19e-001i | +6.26e-001 | 9.22e-001     |

## Comandi di base di Matlab per lo studio delle funzioni di trasferta (3)

Definita una funzione di trasferta è possibile calcolarne la risposta all'impulso tramite il comando *impulse(transfer\_function)*; ad esempio, per la f.t. di pagina precedente (*ga*), si ottiene:

*impulse(ga)*

Prima di provare, lo studente è invitato a “prevedere” la forma “qualitativa” della risposta.

Analogamente, con il comando *step(transfer\_function)* si calcola la risposta a gradino di un sistema dinamico rappresentato dalla sua funzione di trasferta, ad esempio:

*step(ga)*

anche in questo caso, prima di provare, lo studente è invitato a “prevedere” la forma “qualitativa” della risposta.

**ESERCIZI:** vedi file *risposta sistemi I e II ordine*: prendere qualche esempio nel file indicato e provare a studiare la f.t. con Matlab, dopo aver previsto qualitativamente i risultati attesi.

**NOTA:** quando la f.t. è nota come prodotto di termini di primo e secondo grado, per evitare di svolgere il prodotto ed ottenere i coefficienti è comodo anteporre il comando *s=tf('s')* e poi scrivere direttamente la funzione di trasferta; ad esempio, la f.t.:

$$G(s) = \frac{10(s+1)(s+5)}{(s+3)(s^2+20s+10)}$$

può essere definita in Matlab senza calcolare i coefficienti dei polinomi *Num(s)* e *Den(s)* così:

*s=tf('s')*

*g=10\*(s+1)\*(s+5)/((s+3)\*(s^2+20\*s+10))*

Transfer function:

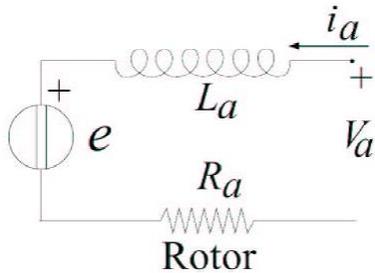
10 s^2 + 60 s + 50

-----  
s^3 + 23 s^2 + 70 s + 30

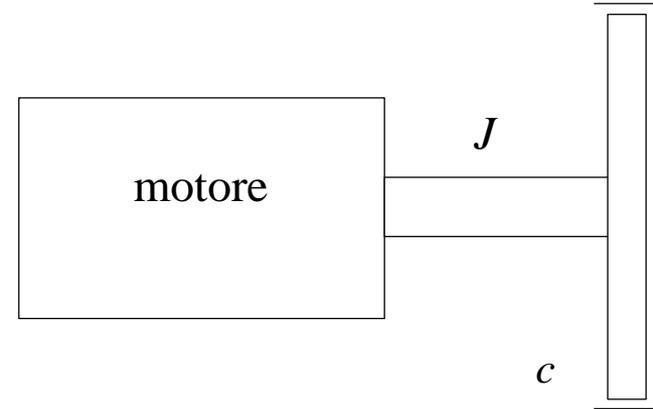
## Esercizio

Dato un sistema elettromeccanico costituito da un motore elettrico in corrente continua a magneti permanenti, con carico inerziale e viscoso, trovare le funzioni di trasferta fra la tensione di ingresso  $V_a$  e la velocità  $\omega$  e la posizione angolare  $\theta$  del carico, determinarne la stabilità e studiare la dinamica del sistema per ingressi tipici (impulso, gradino).

Il sistema è composto da due sottosistemi, elettrico e meccanico, accoppiati fra di loro:



*parte elettrica.*  $L_a$ ,  $R_a$ : induttanza e resistenza di armatura;  $V_a$ : tensione di alimentazione;  $e$ : forza contro-elettromotrice



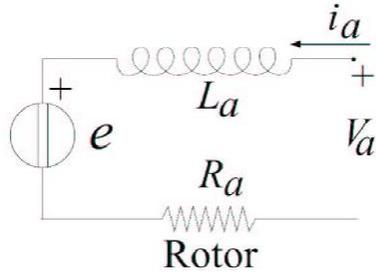
*parte meccanica.*  $J$ : inerzia motore + carico;  $c$ : coefficiente viscoso del carico

L'accoppiamento è dato dal fatto che:

- la corrente di armatura  $i_a$  produce una coppia motrice  $M_m$  ad essa proporzionale;
- la rotazione del rotore del motore produce una forza contro-elettromotrice  $e$  proporzionale alla velocità di rotazione  $\omega$ .

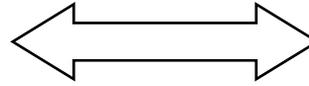
Nel modello più semplice, la costante di proporzionalità  $K$  per questi due fenomeni è la stessa.

## Esercizio (segue)



equazione parte elettrica

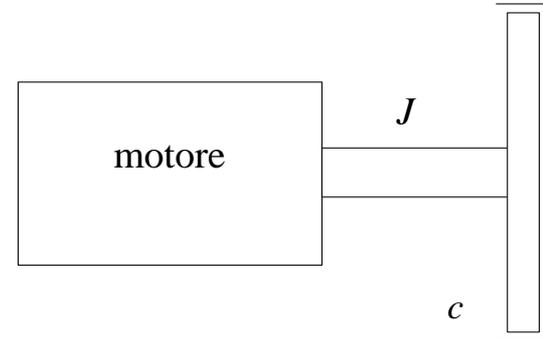
$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e$$



equazione di accoppiamento

$$M_m = k i_a$$

$$e = k \omega$$



equazione parte meccanica

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m - c\omega$$

Trasformando per condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$V_a = R_a I_a + L_a s I_a + E$$

$$M_m = k I_a$$

$$J s \Omega = M_m - c \Omega$$

$$E = k \Omega$$

Eliminando  $E$  ed  $M_m$  si ottiene:

$$V_a = R_a I_a + L_a s I_a + k \Omega$$

$$J s \Omega = k I_a - c \Omega$$

Infine, eliminando  $I_a$ :

$$\frac{V_a - k \Omega}{(R_a + L_a s)} = I_a = \frac{1}{k} (J s + c) \Omega$$

## Esercizio (segue)

Dalla precedente relazione si ottiene la funzione di trasferta fra  $V_a$  e  $\omega$  :

$$kV_a - k^2\Omega = (L_a s + R_a)(Js + c)\Omega$$

$$kV_a = \left[ (L_a s + R_a)(Js + c) + k^2 \right] \Omega$$

$$\frac{\Omega}{V_a} = \frac{k}{(L_a s + R_a)(Js + c) + k^2}$$

Che dimensioni ha  $k$ ?

Valori numerici:

$$R_a = 2 \Omega; L_a = 0.5 \text{ H}; k = 0.1 \text{ ???}; J = 0.02 \text{ kgm}^2; c = 0.2 \text{ Nms}$$

Per ottenere la funzione di trasferta fra  $V_a$  e  $\theta$  basta ricordare che:

$$\theta = \int \omega dt \quad \text{per cui, trasformando,} \quad \Theta = \frac{\Omega}{s}, \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{\Theta}{V_a} = \frac{k}{s \left[ (L_a s + R_a)(Js + c) + k^2 \right]}$$

*Esercizi proposti:*

- 1) Studiare le proprietà dei due sistemi con Matlab (stabilità, risposta impulsiva e a gradino).
- 2) Discutere la stabilità dei due sistemi, anche in funzione dei loro parametri  $L_a$ ,  $R_a$ ,  $J$  e  $k$ .

*(Vedi file Mot\_cc\_in.m; domanda: è sensato che la risposta di  $\theta$  ad un impulso di tensione abbia lo stesso grafico della risposta di  $\omega$  ad un gradino di tensione? Come si può dimostrare?)*

# Risposta in frequenza

Dato un sistema dinamico, si assuma che l'ingresso sia una forzante armonica del tipo:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$



E' facile dimostrare che, **se il sistema è stabile**, l'uscita del sistema, **a regime**, sarà anch'essa una funzione armonica, di ampiezza  $Y_0$  in generale diversa da quella dell'ingresso e sfasata di un angolo  $\varphi$  rispetto all'ingresso; essa ha pertanto la seguente forma generale:

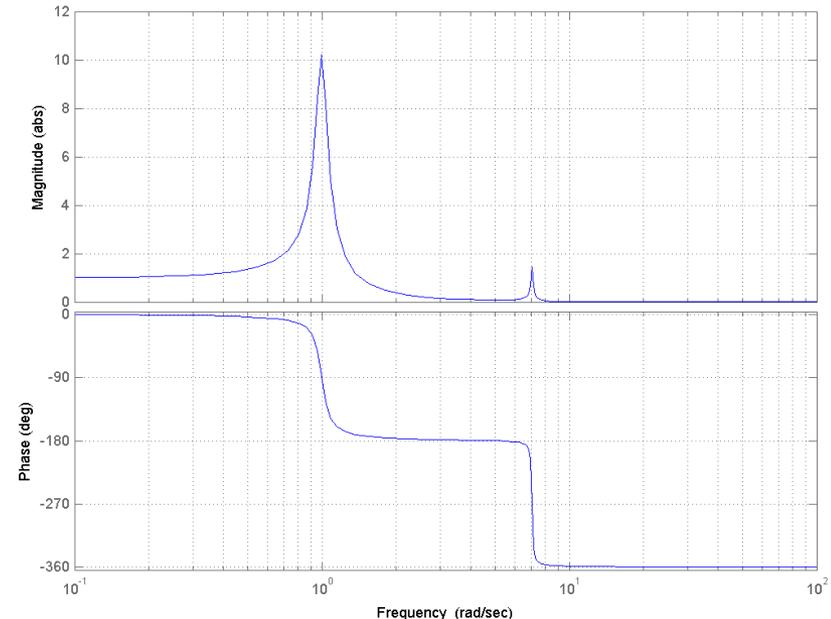
$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

I valori della variabile  $Y_0 / U_0$  (denominata **guadagno** o **ampiezza**) e della variabile  $\varphi$  (denominata **fase**) dipendono solo:

- dalle caratteristiche del sistema dinamico;
- dalla pulsazione  $\omega$  della grandezza forzante.

In generale, la risposta in frequenza di un sistema dinamico è rappresentata da due curve, che hanno in ascissa la pulsazione dell'ingresso  $u(t)$ , e in ordinate rispettivamente il guadagno e la fase della risposta  $y(t)$ .

*Notare che nei due grafici a fianco la scala delle ascisse è logaritmica.*



## Risposta in frequenza e funzione di trasferta

Un problema classico è quello di calcolare la risposta in frequenza (ampiezza e fase) di un dato un sistema dinamico, di cui si conosce l'equazione differenziale e, pertanto la funzione di trasferta  $G(s)$ .



Trattando il problema in termini di funzione di trasferta e trasformata del segnale di ingresso si ha:

$$Y(s) = G(s)U(s) \text{ in cui } U(s) = U_0\omega / (s^2 + \omega^2) \text{ essendo } u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$\text{per cui } Y(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} \frac{U_0\omega}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{Num(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\dots(s - \lambda_n)} \frac{U_0\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

L'introduzione della forzante aggiunge, ai poli  $\lambda_i$  originariamente presenti, due nuove radici al denominatore della funzione di uscita. Antitrasformando la precedente espressione si ottiene:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + C_{+j\omega} e^{+j\omega t} + C_{-j\omega} e^{-j\omega t}$$

in cui, come già visto, gli esponenziali nella sommatoria corrispondenti ai poli della  $G(s)$  esprimono il comportamento transitorio, mentre gli ultimi due termini, legati alla presenza della forzante, costituiscono il comportamento a regime cercato.

Se il sistema è stabile, la  $y(t)$  a regime sarà pertanto:

$$y_{reg}(t) = C_{+j\omega} e^{+j\omega t} + C_{-j\omega} e^{-j\omega t}$$

Per ottenere l'espressione esplicita di tale funzione, calcoliamo  $C_{+j\omega}$  e  $C_{-j\omega}$  con le note formule:

$$C_{+j\omega} = \frac{Num(j\omega)U_0\omega}{Den(j\omega)(j\omega + j\omega)} = \frac{Num(j\omega)U_0\omega}{Den(j\omega)2j\omega} = G(j\omega) \frac{U_0}{2j}$$

$$C_{-j\omega} = \frac{Num(-j\omega)U_0\omega}{Den(-j\omega)(-j\omega - j\omega)} = \frac{Num(-j\omega)U_0\omega}{Den(-j\omega)(-2j\omega)} = G(-j\omega) \frac{U_0}{-2j}$$

## Risposta in frequenza e funzione di trasferta

Quindi  $y(t) = \frac{U_0}{2j} (G(j\omega)e^{+j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t})$  ; inoltre:

$$G(j\omega) = \frac{Num(j\omega)}{Den(j\omega)} = \frac{Num_r + jNum_i}{Den_r + jDen_i} = \frac{Num^* e^{j\alpha_1}}{Den^* e^{j\alpha_2}} = \frac{Num}{Den} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{Num}{Den} e^{j\varphi} = |G(j\omega)| e^{j\varphi}$$

in cui  $Num = \sqrt{Num_r^2 + Num_i^2}$  ,  $Den = \sqrt{Den_r^2 + Den_i^2}$  ,  $\alpha_1 = \arctan(Num_i / Num_r)$  ,  $\alpha_2 = \arctan(Den_i / Den_r)$  ,  $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ .

Analogamente  $G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi}$  , per cui:

$$y(t) = U_0 |G(j\omega)| \left( \frac{e^{(j\omega t + j\varphi)} - e^{-(j\omega t + j\varphi)}}{2j} \right) = U_0 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Pertanto, la risposta in frequenza avrà ampiezza  $\frac{Y_0}{U_0} = |G(j\omega)|$  e fase  $\varphi = \angle G(j\omega)$ .

### RISULTATO IMPORTANTE

Si conclude che per valutare la **risposta in frequenza** (cioè la risposta a regime per forzante sinusoidale) di un sistema dinamico basta valutare l'andamento del **modulo** e della **fase** della sua **funzione di trasferta**  $G(s)$ , **calcolata per**  $s = j\omega$ , cioè l'ampiezza e la fase della funzione a valori complessi  $G(j\omega)$ , in cui la variabile  $\omega$  rappresenta la pulsazione dell'ingresso.

## Funzioni di trasferta: ampiezza e fase

Data una F.T.  $G(s)$  in forma di rapporto fra polinomi e conoscendo sia i poli,  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ , che gli zeri  $\{\mu_i, i=1, \dots, m\}$  del sistema, essa potrà essere espressa nella seguente forma:

$$G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = k \frac{(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2) \dots (s - \lambda_n)}$$

E' importante osservare che, avendo espresso  $G(s)$  in forma di prodotti, è facile calcolarne il modulo e la fase per assegnati valori di  $s = \sigma + j\omega$ . Infatti, essi saranno ottenibili applicando le formule di prodotto e divisione per ciascuno dei fattori presenti nella  $G(s)$ . Per i motivi discussi nella pagina precedente, questa operazione è particolarmente utile per valori di  $s$  immaginari puri, cioè per  $s = j\omega$ :

- i termini di primo grado  $(s - \nu) = (j\omega - \nu)$  avranno modulo  $(\omega^2 + \nu^2)^{1/2}$  e fase  $\arctan(-\omega / \nu)$
- i termini di secondo grado  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2$  avranno:

$$\text{modulo} = \omega_n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad e \quad \text{fase} = \arctan\left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

- il modulo di  $G(j\omega)$  sarà il prodotto di tutti i moduli a numeratore diviso tutti i moduli a denominatore:  $|G(j\omega)| = k |j\omega - \mu_1| |j\omega - \mu_2| \dots |j\omega - \mu_m| / (|j\omega - \lambda_1| |j\omega - \lambda_2| \dots |j\omega - \lambda_n|)$
- la fase di  $G(j\omega)$  sarà la somma di tutte le fasi a numeratore meno tutte le fasi a denominatore:  
 $\angle G(j\omega) = \angle(j\omega - \mu_1) + \angle(j\omega - \mu_2) + \dots + \angle(j\omega - \mu_m) - \angle(j\omega - \lambda_1) - \angle(j\omega - \lambda_2) - \dots - \angle(j\omega - \lambda_n)$

*NOTA: le proprietà c e d derivano dalle proprietà del prodotto di numeri complessi*

# Risposta in frequenza e diagramma di Bode

Nello studio dei problemi di controllo, la risposta in frequenza viene di solito rappresentata in forma grafica, mediante il diagramma denominato **diagramma di Bode**.

Esempio di diagramma per la funzione: 
$$G(s) = \frac{50}{s^4 + 1.1s^3 + 56.1s^2 + 50.6s + 300}$$

In ascisse troviamo la pulsazione dell'ingresso (rad/s) in scala logaritmica.

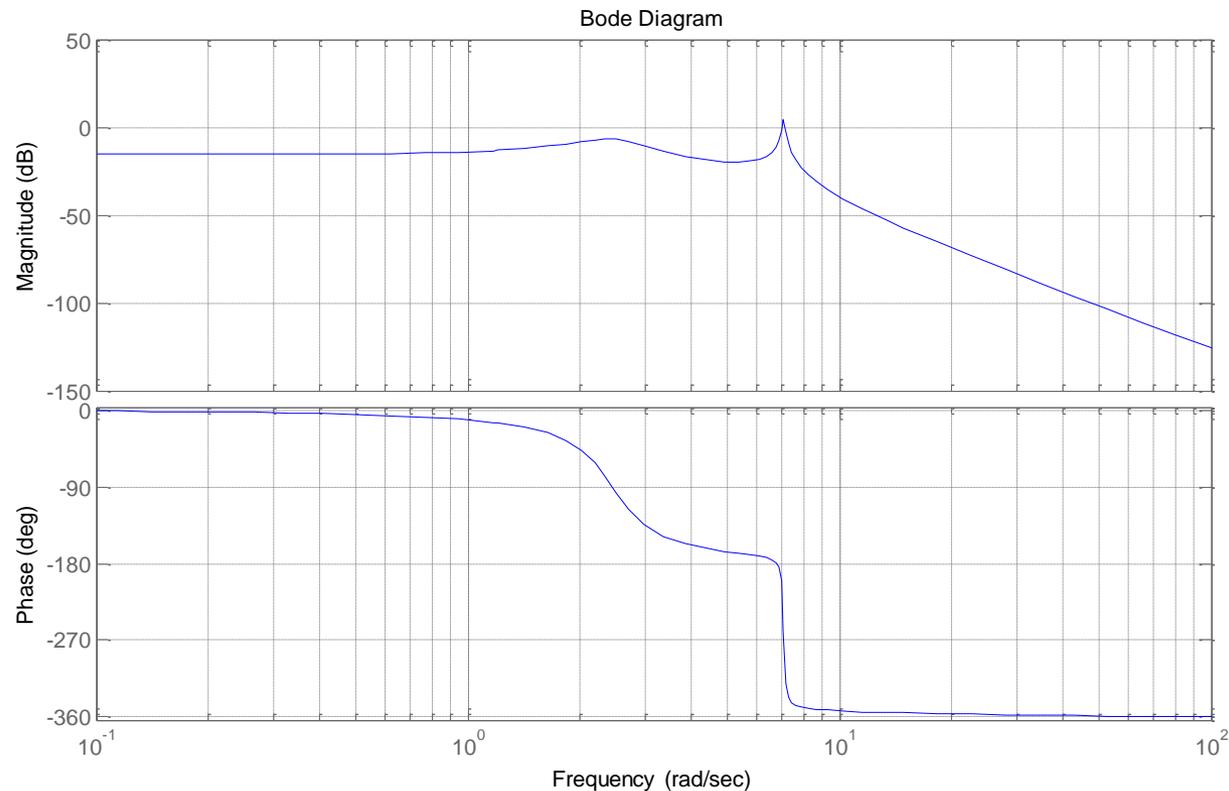
In ordinate troviamo:

- nel diagramma in alto (*ampiezza*): l'ampiezza della risposta, espressa in decibel
- nel diagramma in basso (*fase*): la fase della risposta, espressa in gradi
- il valore in decibel (dB) di una quantità  $A$  è:

$$A_{dB} = 20 \log_{10}(A)$$

- il passaggio inverso è:

$$A = 10^{(AdB/20)}$$



# Risposta in frequenza e diagramma di Bode

Prendiamo dimestichezza con i decibel:

$$A = 1 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

**NB:** 0 Db = ampiezza UNITARIA (segnale di uscita di ampiezza uguale all'ingresso)

$$A = 10 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$

$$A = 100 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(100) = 40 \text{ dB}$$

$$A = 1000 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(1000) = 60 \text{ dB}$$

*Esercizio:* calcolare il valore in dB di:  
150, 0.17, 20000, 15,  $1e^{-6}$ ;  
calcolare il valore di:  
15dB, -50dB, 200dB, 1.5dB, -20dB

I decibel, essendo basati sui logaritmi, crescono molto lentamente.

Se il guadagno è minore di 1 si ha:

$$A = 0.1 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(0.1) = -20 \log_{10}10 = -20 \text{ dB}$$

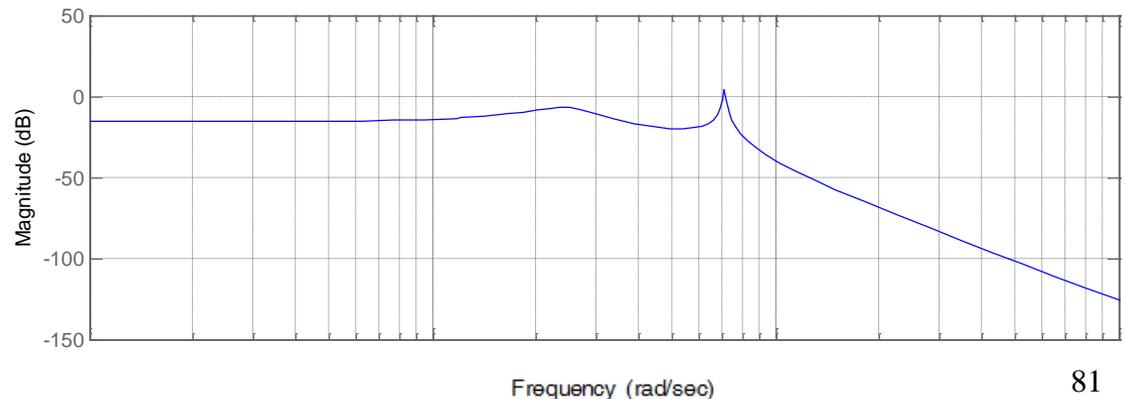
$$A = 0.01 \quad A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(0.01) = -20 \log_{10}100 = -40 \text{ dB}$$

Per guadagni minori di 1 (ampiezza dell'uscita minore di quella dell'ingresso), la misura in dB è espressa da un numero negativo.

Tornando al nostro esempio:

$$G(s) = \frac{50}{s^4 + 1.1s^3 + 56.1s^2 + 50.6s + 300}$$

osservare cosa succede per  $s \rightarrow 0$



## Risposta in frequenza e diagramma di Bode

Dato una F.T.  $G(s)$  di cui si conoscono poli e zeri, mettendo in evidenza le costanti di tempo (reciproci dei poli reali), si ha (formula molto simile a quella di pag. 79, ma i  $k$  non sono uguali):

$$G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = k \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_n^2 + (2\zeta_i / \omega_{n_i})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

Per  $s = j\omega$  si ottiene:

- i termini di primo grado  $(1 + sT) = (1 + j\omega T)$  avranno modulo  $= (1 + \omega^2 T^2)^{1/2}$  e fase  $= \arctan(\omega T)$
- i termini di secondo grado  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) / \omega_n^2 = ((j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2) / \omega_n^2$  avranno:

$$modulo = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad e \quad fase = \arctan \frac{\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Il modulo di  $G(j\omega)$  sarà il prodotto di tutti i moduli a numeratore diviso tutti i moduli a denominatore. Esprimendo le grandezze in decibel si ha (solo termini di I grado, per ora):

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} (k (1 + \omega^2 T_{n1}^2)^{1/2} \cdot (1 + \omega^2 T_{n2}^2)^{1/2} \cdot \dots / ((1 + \omega^2 T_{d1}^2)^{1/2} \cdot (1 + \omega^2 T_{d2}^2)^{1/2} \cdot \dots)) = \\ &= 20 \log_{10} k + 20 \log_{10} (1 + \omega^2 T_{n1}^2)^{1/2} + 20 \log_{10} (1 + \omega^2 T_{n2}^2)^{1/2} + \dots \\ &\quad - 20 \log_{10} (1 + \omega^2 T_{d1}^2)^{1/2} - 20 \log_{10} (1 + \omega^2 T_{d2}^2)^{1/2} \dots \end{aligned}$$

**NB:** usando i dB, prodotto  $\rightarrow$  somma, divisione  $\rightarrow$  differenza.

La fase di  $G(j\omega)$  sarà la somma di tutte le fasi a numeratore meno tutte le fasi a denominatore:

$$\angle G(j\omega) = \arctan(\omega T_{n1}) + \arctan(\omega T_{n2}) + \dots - \arctan(\omega T_{d1}) - \arctan(\omega T_{d2}) - \dots$$

## Diagramma di Bode asintotico (ampiezza, I ordine)

Prendiamo in considerazione la  $G(s) = 1/(1+10s)$  che ha una costante di tempo  $T = 10$  s, e tracciamone il diagramma di Bode; analiticamente si ha per l'ampiezza:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10}(1 + \omega^2 T_{d1}^2)^{1/2} = -20 \log_{10}(1 + 100\omega^2)^{1/2}$$

- per  $\omega \ll 1/T$ ,  $\omega T \ll 1 \Rightarrow -20 \log_{10}(1+(T\omega)^2)^{1/2} \approx -20 \log_{10}1 = 0$

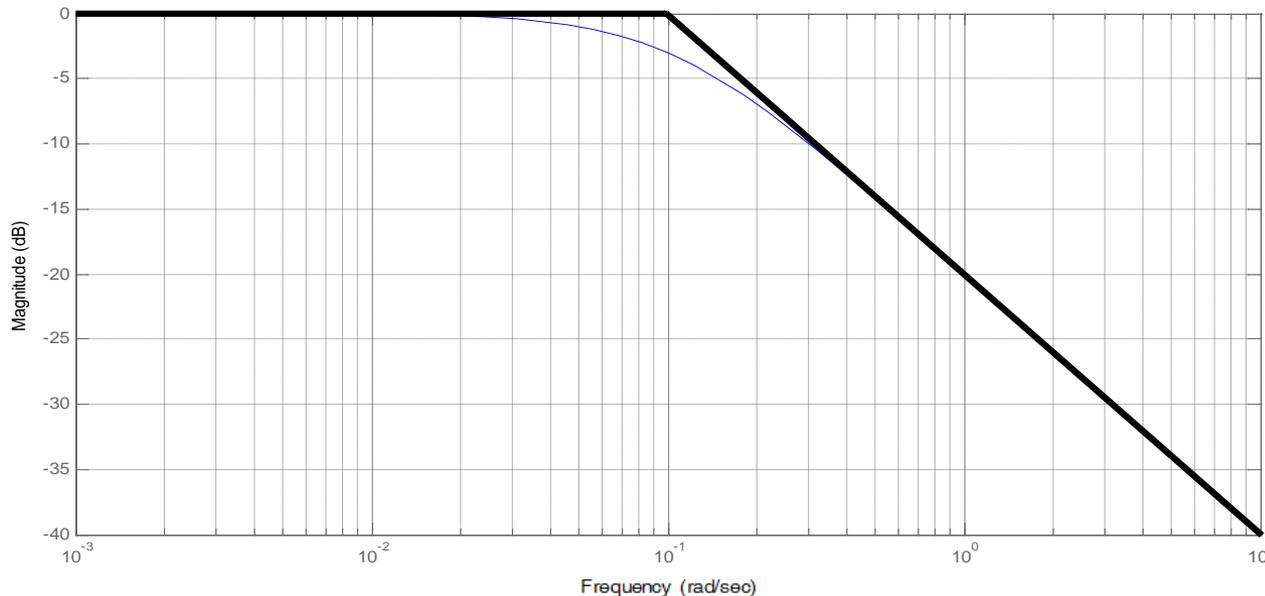
(per  $\omega \ll 1/T$  l'approssimazione è una retta orizzontale)

- per  $\omega \gg 1/T$ ,  $\omega T \gg 1 \Rightarrow -20 \log_{10}(1+(\omega T)^2)^{1/2} \approx -20 \log_{10}(\omega T)$

ad es., per  $\omega T = 10$  si ha  $-20 \log_{10}(\omega T) = -20$ , per  $\omega T = 100$  si ha  $-20 \log_{10}(\omega T) = -40$

(per  $\omega \gg 1/T$  l'approssimazione è un andamento decrescente, rettilineo con pendenza  $-20$  dB/decade)

L'errore massimo dell'approssimazione si ha per  $\omega = 1/T$ ; esso è pari a circa 3 dB.



## Diagramma di Bode asintotico (fase, I ordine)

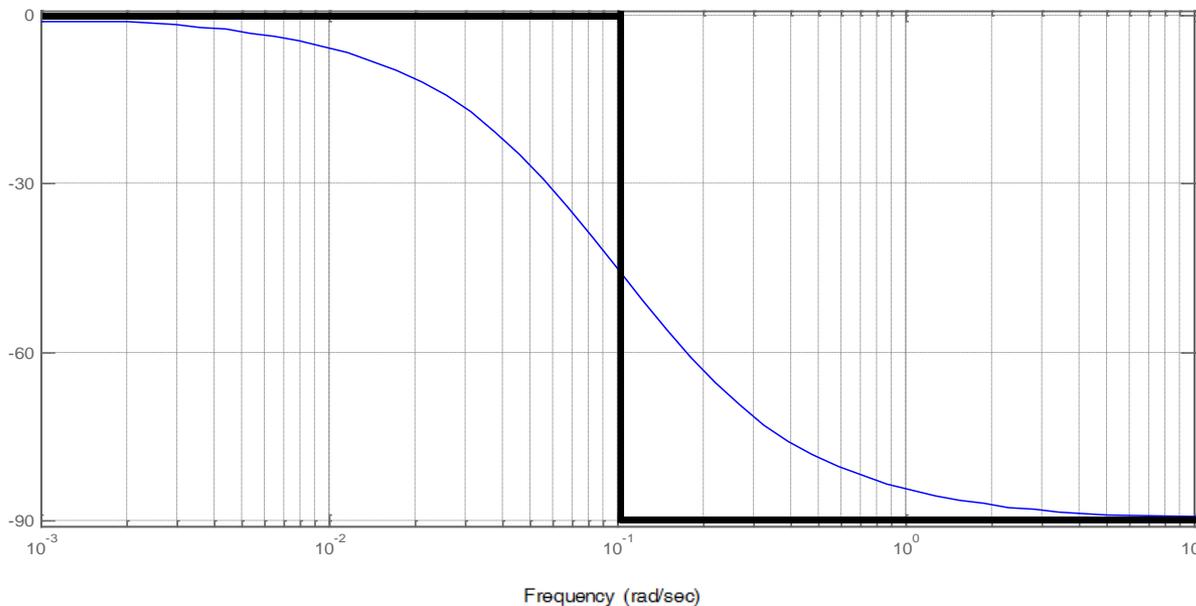
Prendiamo sempre in considerazione la  $G(s) = 1/(1+10s)$  con costante di tempo  $T = 10s$ , e tracciamo il diagramma di Bode per la fase; si ha:  $\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega T_{d1}) = -\arctan(10\omega)$

per  $\omega \ll 1/T$ ,  $\omega T \ll 1 \Rightarrow -\arctan(\omega T_{d1}) \approx 0^\circ$

per  $\omega \gg 1/T$ ,  $\omega T \gg 1 \Rightarrow -\arctan(\omega T_{d1}) \approx -90^\circ$

La fase (asintotica) ha un andamento a gradino con passaggio da  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  per  $\omega = 1/T_{d1}$ .

Osservando i diagrammi, si può osservare che l'andamento della fase asintotica è molto meno fedele all'andamento reale di quanto lo sia quello dell'ampiezza.



# Diagramma di Bode asintotico (ampiezza, II ordine)

Prendiamo in considerazione un sistema del II ordine con f.t.

$$G(s) = 1 / (s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1) = 1 / (s^2/100 + 0.10s + 1)$$

nel quale  $\omega_n = 10$  rad/s e  $\zeta = 0.5$ , e tracciamone il diagramma di Bode; analiticamente si ha (v. 3 pag. fa):

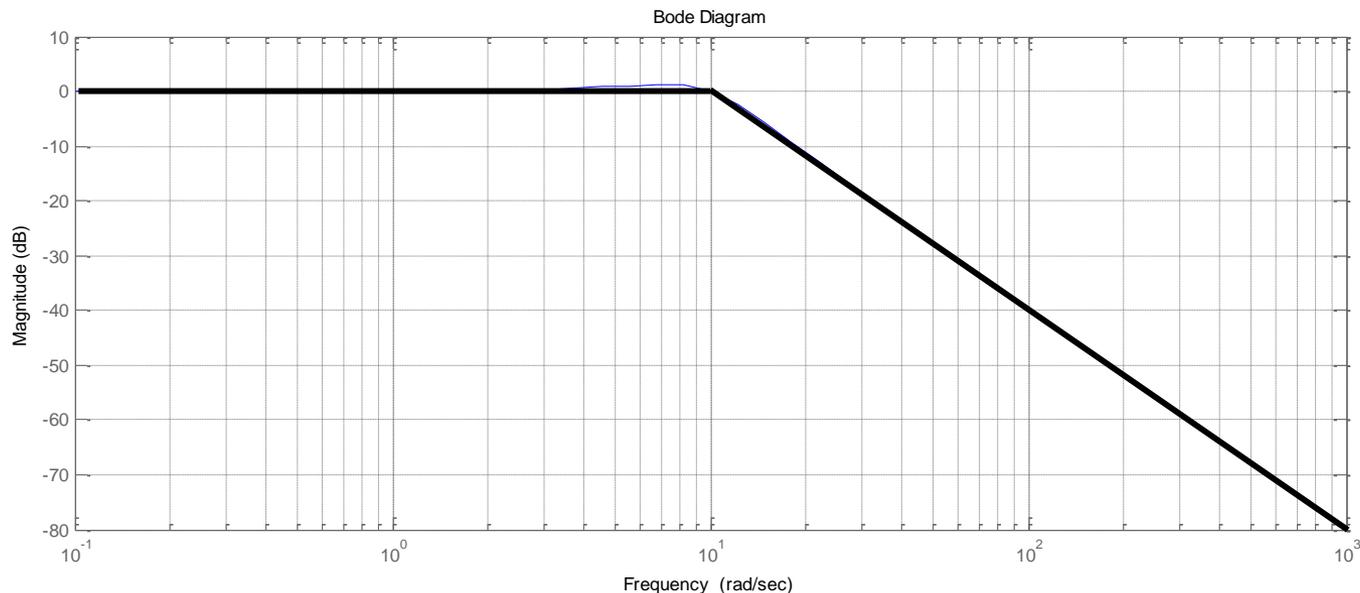
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10}[(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2]^{1/2} = -20 \log_{10}[(1 - \omega^2/100)^2 + (\omega/10)^2]^{1/2}$$

- per  $\omega \ll \omega_n$ ,  $\omega/\omega_n \ll 1 \Rightarrow -20 \log_{10}[(1 - \omega^2/100)^2 + (\omega/10)^2]^{1/2} \approx -20 \log_{10}1 = 0$  dB (andamento costante)

- per  $\omega \gg \omega_n$ ,  $\omega/\omega_n \gg 1 \Rightarrow -20 \log_{10}[(1 - \omega^2/100)^2 + (\omega/10)^2]^{1/2} \approx -40 \log_{10}(\omega/10) = -40 \log_{10}(\omega/\omega_n)$

Ad es., per  $\omega/\omega_n = 10$  si ha  $-40 \log_{10}(\omega/\omega_n) = -40$ ; per  $\omega/\omega_n = 100$  si ha  $-40 \log_{10}(\omega/\omega_n) = -80$ ;

quindi per  $\omega \gg \omega_n$  si ha un andamento asintotico decrescente rettilineo con pendenza  $-40$  dB/decade.



# Diagramma di Bode (ampiezza, II ordine, diagramma reale, dipendenza da $\zeta$ )

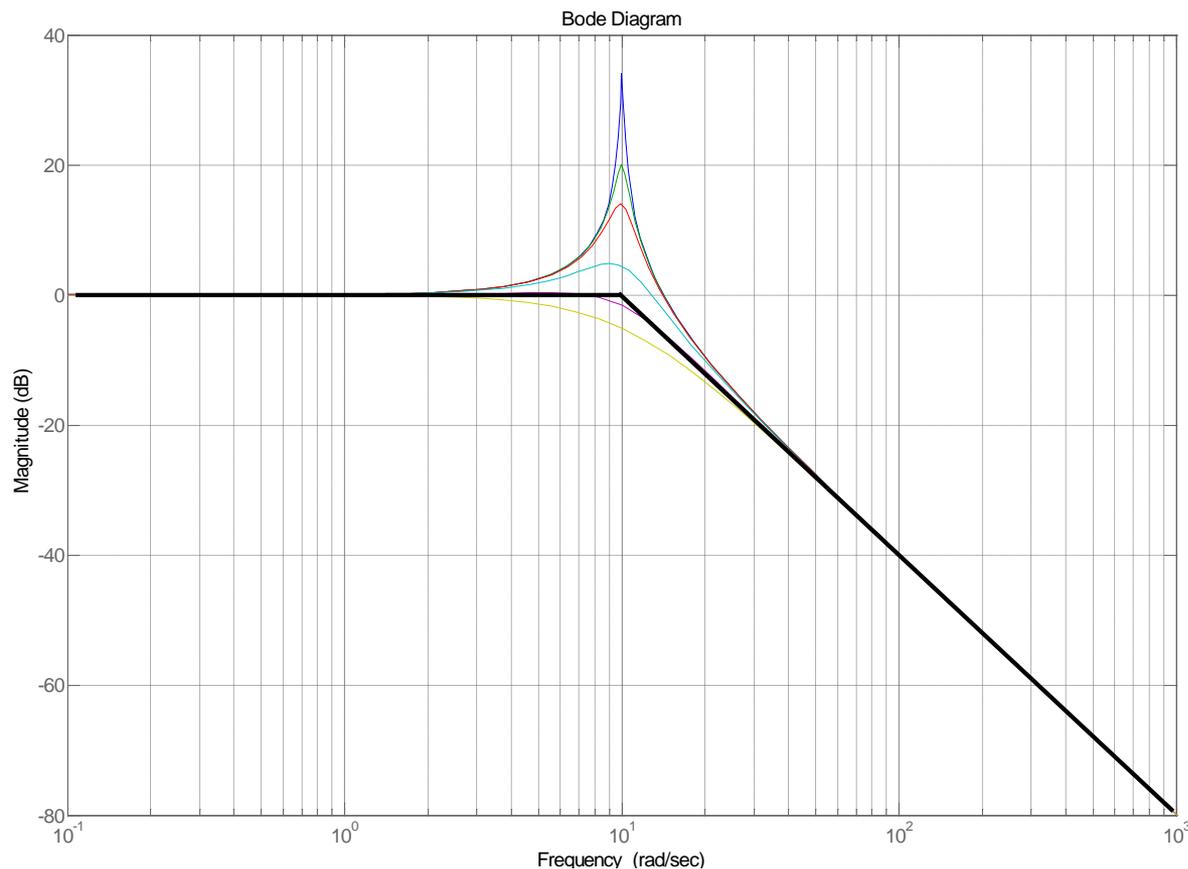
Prendiamo in considerazione il precedente sistema del II ordine con funzione di trasferta:

$$G(s) = 1 / (s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 100 / (s^2 + 2\zeta 10 s + 100)$$

nel quale  $\omega_n = 10$  rad/s e  $\zeta$  è variabile.

Tracciamo vari diagrammi di ampiezza per valori di  $\zeta$  compresi fra 0 e 1:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} [(1 - \omega^2 / 100)^2 + (2\zeta\omega / 10)^2]^{1/2}$$



Partendo dal basso, le curve sono graficate per  $\zeta = 0.9, 0.6, 0.3, 0.1, 0.05, 0.01$ .

Come si vede, la rappresentazione asintotica corrisponde bene a quella reale per  $\zeta$  uguale a circa 0.5, mentre per valori bassi di  $\zeta$  la presenza del picco rende inaffidabile l'uso della sola rappresentazione asintotica.

Per bassi valori di  $\zeta$ , una ottima stima del picco si può ottenere confondendo la pulsazione del picco con  $\omega_n$  (in realtà il picco è a  $\omega_n (1 - 2\zeta^2)^{1/2}$ ; con questa approssimazione il picco si calcola facilmente:  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10}(2\zeta)$ ; ad esempio per  $\zeta = 0,05$  è 20 dB.

# Diagramma di Bode asintotico (fase , II ordine)

Per lo stesso sistema  $G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 100/(s^2 + 10 s + 100)$ ,  
con  $\omega_n = 10$  rad/s e  $\zeta = 0.5$  :

$$\angle G(j\omega) = - \arctan((2\zeta\omega/\omega_n) / (1 - \omega^2/\omega_n^2)) = - \arctan((\omega/10) / (1 - \omega^2/100))$$

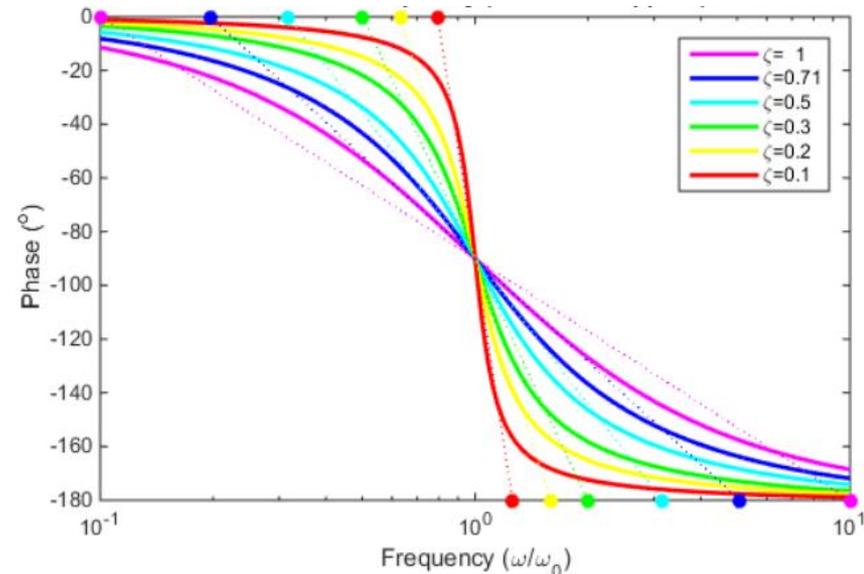
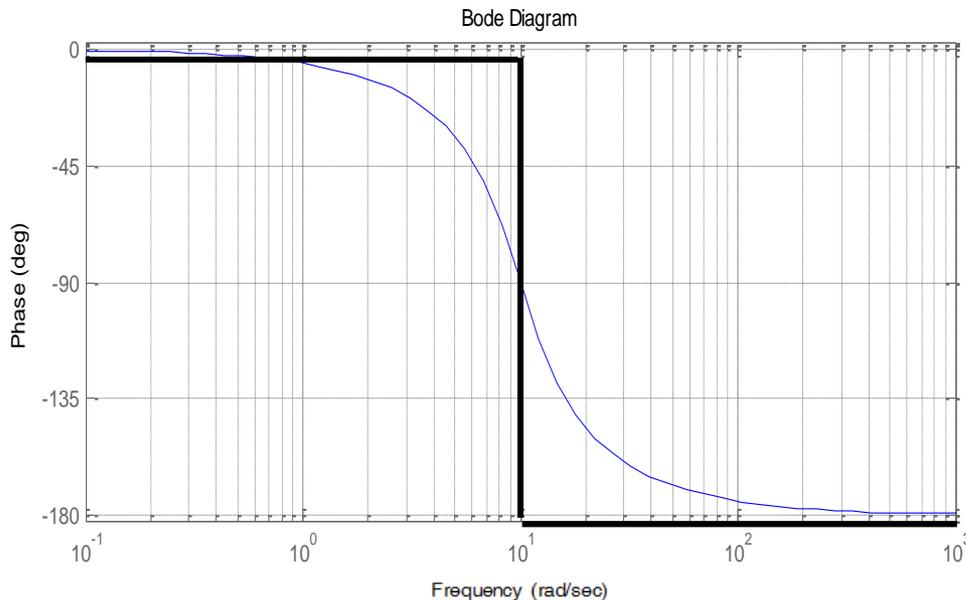
- per  $\omega \ll \omega_n$ ,  $\omega/\omega_n \ll 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = - \arctan((2\zeta\omega/\omega_n) / (1 - \omega^2/\omega_n^2)) \approx 0^\circ$

- per  $\omega \gg \omega_n$ ,  $\omega/\omega_n \gg 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = - \arctan((2\zeta\omega/\omega_n) / (1 - \omega^2/\omega_n^2)) \approx -180^\circ$

La fase (asintotica) ha un andamento a gradino con passaggio da  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  per  $\omega = \omega_n$ .

Osservando i diagrammi di questa pagina e di quella precedente, si può osservare che l'andamento della fase asintotica è molto meno fedele all'andamento reale di quanto lo sia quello dell'ampiezza.

*Nota:  $\zeta$  influisce anche sul diagramma della fase, vd . diagramma a destra: per  $\zeta$  bassi l'andamento è più aderente agli asintoti.*



## Diagramma di Bode asintotico (ampiezza, I ordine a numeratore)

Prendiamo in considerazione la  $G(s) = (1 + 10s)$  che ha una costante di tempo (a numeratore)  $T_{n1} = 10s$ , e tracciamone il diagramma di Bode; analiticamente, per la fase si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(1 + \omega^2 T_{n1}^2)^{1/2} = 20\log_{10}(1 + 100\omega^2)^{1/2}$$

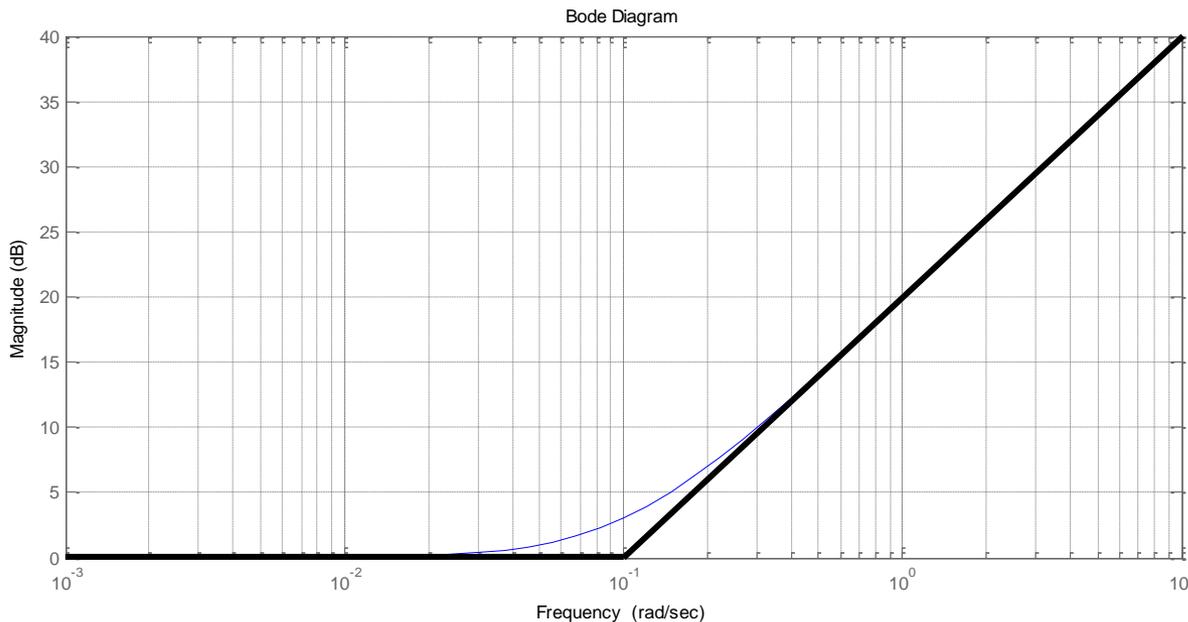
- per  $\omega \ll 1/T_{n1}$ ,  $\omega T_{n1} \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(1 + (\omega T_{n1})^2)^{1/2} \approx 20\log_{10}1 = 0$

- per  $\omega \gg 1/T_{n1}$ ,  $\omega T_{n1} \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(1 + (\omega T_{n1})^2)^{1/2} \approx 20\log_{10}(\omega T_{n1})$

Ad es, per  $\omega T_{n1} = 10$  si ha  $20\log_{10}(\omega T_{n1}) = 20$ ; per  $\omega T_{n1} = 100$  si ha  $20\log_{10}(\omega T_{n1}) = 40$ ;

quindi per  $\omega \gg 1/T_{n1}$  si ha un andamento crescente, rettilineo con pendenza  $+20\text{dB/decade}$ .

L'errore massimo si ha per  $\omega = 1/T_{n1}$ ; esso è pari a circa 3 dB.



## Diagramma di Bode asintotico (fase, I ordine a numeratore)

Prendiamo in considerazione sempre la  $G(s) = (1+10s)$  con costante di tempo (a numeratore)  $T_{n1} = 10s$ , e tracciamone il diagramma di Bode; analiticamente, per la fase si ha:

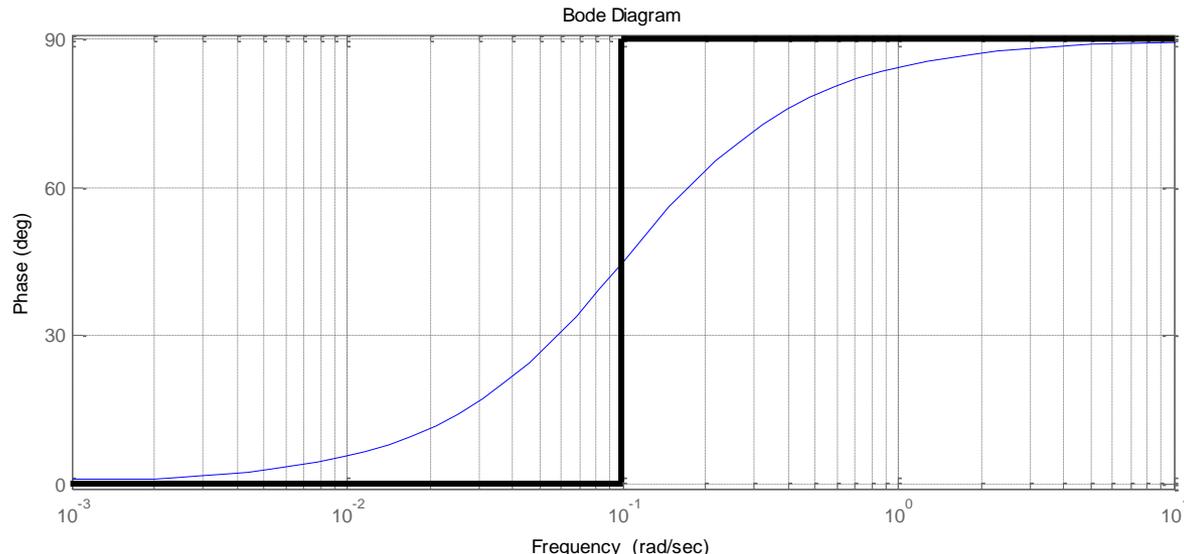
$$\angle G(j\omega) = \arctan(\omega T_{n1}) = \arctan(10\omega)$$

- per  $\omega \ll 1/T_{n1}$ ,  $\omega T_{n1} \ll 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = \arctan(\omega T_{n1}) \approx 0^\circ$

- per  $\omega \gg 1/T_{n1}$ ,  $\omega T_{n1} \gg 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = \arctan(\omega T_{n1}) \approx 90^\circ$

La fase asintotica ha un andamento a gradino con passaggio da  $0^\circ$  a  $90^\circ$  per  $\omega = 1/T_{n1}$ .

Osservando i diagrammi di questa pagina e di quella precedente, si può osservare che l'andamento della fase asintotica è molto meno fedele all'andamento reale di quanto lo sia quello dell'ampiezza.



## Funzione di trasferta, guadagno statico e diagramma di Bode

Data una generica funzione di trasferta  $G(s)$ , espressa come rapporto tra polinomi in  $s$ , supponendo (per ora) che  $a_0$  e  $b_0$  siano ambedue non nulli:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

definiamo il valore del **guadagno statico**  $k_p$  (a frequenza dell'ingresso che tende a zero) come:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{b_0}{a_0}$$

Qualora la  $G(s)$  sia espressa in forma fattorizzata, secondo la definizione classica, si ottiene:

$$G(s) = k \frac{(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2) \dots (s - \lambda_n)} \Rightarrow k_p = k \frac{(-\mu_1)(-\mu_2) \dots (-\mu_m)}{(-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots \omega_{n_i}^2 \dots (-\lambda_n)}$$

A questo punto, raccogliendo il guadagno, e introducendo le costanti di tempo  $T = -1/\nu$ , dove  $\nu$  è un polo o uno zero, si ha la seguente forma normalizzata della  $G(s)$ :

$$G(s) = k_p \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_{n_i}^2 + (2\zeta_i / \omega_{n_i})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

In diagramma di Bode, il termine  $k_p$  produce un valore costante di ampiezza, pari a  $20\log_{10}k_p$  e nessun effetto sulla fase. Comunque la definizione più generale e indipendente dalla forma della  $G(s)$  di guadagno statico è, **se il limite esiste**:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$$

## Diagramma di Bode asintotico (ampiezza, generale)

Data una generica funzione di trasferta  $G(s)$ , espressa come rapporto tra polinomi in  $s$ , e supponendo (per ora) che  $a_0$  e  $b_0$  siano ambedue non nulli, essa potrà essere espressa in forma fattorizzata, con soli coefficienti reali, tramite termini di primo e secondo ordine, come già mostrato in precedenza:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = k_p \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_{ni}^2 + (2\zeta_i / \omega_{ni})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

Per costruire il suo diagramma di Bode asintotico (ampiezza), si può procedere nel seguente modo:

- 1) ordinare i reciproci delle costanti di tempo e le pulsazioni naturali in ordine crescente di pulsazione, ottenendo un elenco ordinato di pulsazioni denominate **pulsazioni di spigolo** (ad esempio  $1/T_{d1} < 1/T_{d2} < 1/T_{n1} < \omega_{n1} < 1/T_{d3} < 1/T_{n2} < \dots$ );
- 2) definire il range di pulsazioni da trattare: tipicamente, il valore iniziale di pulsazione  $\omega_{IN}$  sull'asse delle ascisse sarà minore della prima pulsazione di spigolo;
- 3) la curva cercata sarà una spezzata, con spigoli in corrispondenza dei valori delle pulsazioni di spigolo (da cui il nome) contenuti nel precedente elenco;
- 4) il primo tratto da  $\omega_{IN}$  alla prima pulsazione di spigolo sarà orizzontale, con valore pari a  $20\log_{10}k_p$  decibel;
- 5) ciascun tratto successivo, definito tra due valori consecutivi di pulsazioni di spigolo (ad es. da  $1/T_{d1}$  a  $1/T_{d2}$ ), **a)** inizierà nel punto terminale del tratto precedente; **b)** avrà pendenza variata rispetto a quella del tratto precedente, secondo le seguenti regole:
  - **incremento di 20dB/dec** se lo spigolo corrisponde ad un termine del **I ordine a numeratore**;
  - **decremento di 20dB/dec** se lo spigolo corrisponde ad un termine del **I ordine a denominatore**;
  - **incremento di 40dB/dec** se lo spigolo corrisponde ad un termine del **II ordine a numeratore**;
  - **decremento di 40dB/dec** se lo spigolo corrisponde ad un termine del **II ordine a denominatore**.

## Diagramma di Bode asintotico (ampiezza, generale, esercizi)

Seguendo le regole precedentemente elencate, disegnare i diagrammi asintotici delle seguenti F.T.:

$$G_A(s) = \frac{20(1 + 5s)}{(1 + 0.25s)(1 + 3s)}$$

$$G_B(s) = \frac{0.5(1 + 0.01s)}{(1 + 0.25s + s^2 / 36)}$$

$$G_C(s) = \frac{30(s + 0.4)}{(1 + 3s)(1 + 10s)}$$

$$G_D(s) = \frac{0.02(s + 4)(1 + 0.05s)}{(1 + 30s)(s^2 + 2.5s + 50)}$$

$$G_E(s) = \frac{6(1 + 0.04s)(1 + 3s)}{(1 + 0.5s + s^2 / 120)(1 + 15s)}$$

$$G_F(s) = \frac{15(7 + 3s)(3 + 0.8s)}{(15 + 2s + 10s^2)(4 + 13s)(1 + 0.01s)}$$

Suggerimenti:

- normalizzare la forma della F.T., se necessario, e determinare il guadagno statico
- determinare e ordinare le pulsazioni di spigolo
- definire il range di frequenze interessanti e, di conseguenza, il valore di  $\omega_{IN}$
- tracciare le spezzate, a partire dal tratto orizzontale

Tracciare il diagramma di Bode della F.T (v. pag. 73 e seguenti)

$$\frac{\Omega}{V_a} = \frac{k}{(R_a + L_a s)(Js + c) + k^2}$$

$$R_a = 2 \Omega; L_a = 0.5 \text{ H}; k = 0.1 \text{ ???}; J = 0.02 \text{ kgm}^2; c = 0.2 \text{ Nms}$$

Inoltre ottenere la risposta a gradino nel tempo, antitrasformando la  $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)/s$ .

## Diagramma di Bode asintotico (fase, generale)

Data una generica funzione di trasferta  $G(s)$ , espressa come rapporto tra polinomi in  $s$ , e supponendo (per ora) che  $a_0$  e  $b_0$  siano ambedue non nulli, essa potrà essere espressa in forma fattorizzata, con soli coefficienti reali, tramite termini di primo e secondo ordine, come già mostrato in precedenza:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = k_p \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_{ni}^2 + (2\zeta_i / \omega_{ni})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

Il diagramma asintotico di fase è un diagramma costante a tratti, con discontinuità negli stessi punti in cui il diagramma di ampiezza cambia pendenza.

Esso sarà definito sullo stesso intervallo di pulsazioni del diagramma di ampiezza. Una volta costruito il diagramma di ampiezza, il diagramma di fase ne è direttamente deducibile (ed è, in generale, molto meno interessante):

- a) il primo tratto, da  $\omega_{IN}$  alla prima pulsazione di spigolo, avrà valore di fase pari a  $0^\circ$ ;
- b) ciascun tratto successivo avrà valore di fase variato rispetto a quella del tratto precedente, secondo le seguenti regole:
  - **incremento di  $90^\circ$**  se lo spigolo corrisponde ad un termine del **I ordine a numeratore**;
  - **decremento di  $90^\circ$**  se lo spigolo corrisponde ad un termine del **I ordine a denominatore**;
  - **incremento di  $180^\circ$**  se lo spigolo corrisponde ad un termine del **II ordine a numeratore**;
  - **decremento di  $180^\circ$**  se lo spigolo corrisponde ad un termine del **II ordine a denominatore**.

**Esercizio:** tracciare i diagrammi asintotici di fase per le F.T. di pagina precedente.

## Diagramma di Bode asintotico (termini $1/s^N$ , caso $1/s$ )

Esaminiamo una funzione di trasferta  $G(s)$ , espressa come rapporto tra polinomi in  $s$ , supponendo che  $a_0$  (ed eventualmente  $a_1$ ) siano nulli:  $G(s)$  conterrà un polo (o due) nell'origine, e in forma fattorizzata comparirà un termine puro in  $s$  (o  $s^2$ ) a denominatore:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s} = k_v \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{s(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_{ni}^2 + (2\zeta_i / \omega_{ni})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

Osserviamo che nel caso di un polo semplice nell'origine (termine  $1/s$ ):

- 1) il guadagno statico è infinito, infatti:  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{j\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty$
- 2) si definisce, in sostituzione, un guadagno  $k_v$ , che, come vedremo, correla l'ingresso con la derivata dell'uscita:  $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = b_0 / a_1$
- 3) il diagramma di Bode in ampiezza non inizia più con un tratto orizzontale, in quanto è presente una prima pulsazione di spigolo in zero (non rappresentabile esplicitamente in diagramma logaritmico, perché andrebbe a  $-\infty$ ); secondo le regole già enunciate, esso inizierà con un tratto a pendenza  $-20$  dB/dec;
- 4) considerando che in questo primo tratto (fino alla prima vera pulsazione di spigolo) è considerato il solo termine  $k_v/s$ , si avrà che per  $\omega = k_v$  esso avrà ampiezza unitaria e pertanto ampiezza = 0 dB; la posizione del tratto iniziale potrà, pertanto, essere definita intersecando una retta a pendenza  $-20$  dB/dec con l'asse a 0 dB nel punto  $\omega = k_v$ .

## Diagramma di Bode asintotico (termini $1/s^N$ , caso $1/s^2$ )

Nel caso in cui vi siano due poli nell'origine, si avrà:

$$G(s) = k_a \frac{(1 + sT_{n1})(1 + sT_{n2}) \dots (1 + sT_{nm})}{s^2(1 + sT_{d1})(1 + sT_{d2}) \dots (s^2 / \omega_{ni}^2 + (2\zeta_i / \omega_{ni})s + 1) \dots (1 + sT_{dn})}$$

e pertanto:

- 1) i guadagni  $k_p$  e  $k_v$  valgono infinito;
- 2) si definisce, in sostituzione, un guadagno  $k_a$  che, come vedremo, correla l'ingresso con la derivata seconda dell'uscita:  
$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$
- 3) essendo presente una doppia pulsazione di spigolo in zero, il diagramma di Bode in ampiezza inizia con un tratto a pendenza  $-40$  dB/dec;
- 4) da momento che in questo primo tratto (fino alla prima vera pulsazione di spigolo) è considerato il solo termine  $k_a / s^2$ , si avrà che per  $\omega = (k_a)^{1/2}$  esso avrà ampiezza unitaria e pertanto ampiezza = 0 dB; la posizione del tratto iniziale potrà, pertanto, essere definita intersecando una retta a pendenza  $-40$  dB/dec con l'asse a 0 dB nel punto  $\omega = (k_a)^{1/2}$ .

La fase segue le regole già enunciate:

- per i termini  $1/s$ , essa inizia con valore  $-90^\circ$
- per i termini  $1/s^2$ , essa inizia con valore  $-180^\circ$

## Diagramma di Bode asintotico (termini $1/s^N$ , esercizi)

Seguendo le regole precedentemente elencate, disegnare i diagrammi asintotici delle seguenti F.T.:

$$G_A(s) = \frac{20(1 + 3s)}{s(1 + 0.2s)(1 + 3s)}$$

$$G_B(s) = \frac{25(1 + 0.1s)}{s^2(1 + 0.2s + s^2 / 12)}$$

$$G_C(s) = \frac{2(1 + 0.04s)(5 + 3s)}{s(1 + 0.9s + s^2 / 0.01)(4 + 15s)}$$

Tracciare il diagramma di Bode della F.T (v. pag. 73 e seguenti):

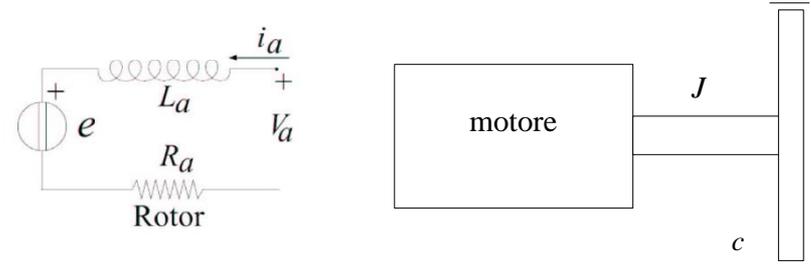
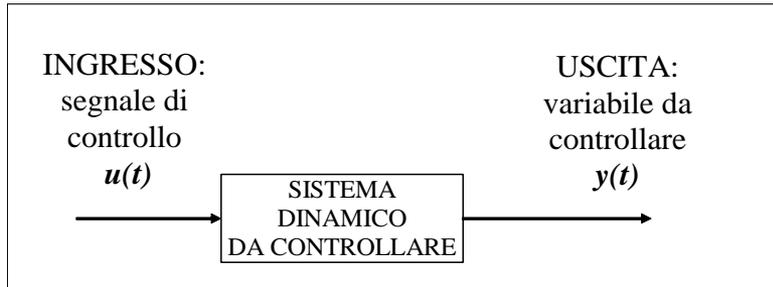
$$\frac{\Theta}{V_a} = \frac{k}{s \left[ (L_a s + R_a)(J s + c) + k^2 \right]}$$

$$R_a = 2 \Omega; L_a = 0.5 \text{ H}; k = 0.1 \text{ ???}; J = 0.02 \text{ kgm}^2; c = 0.2 \text{ Nms}$$

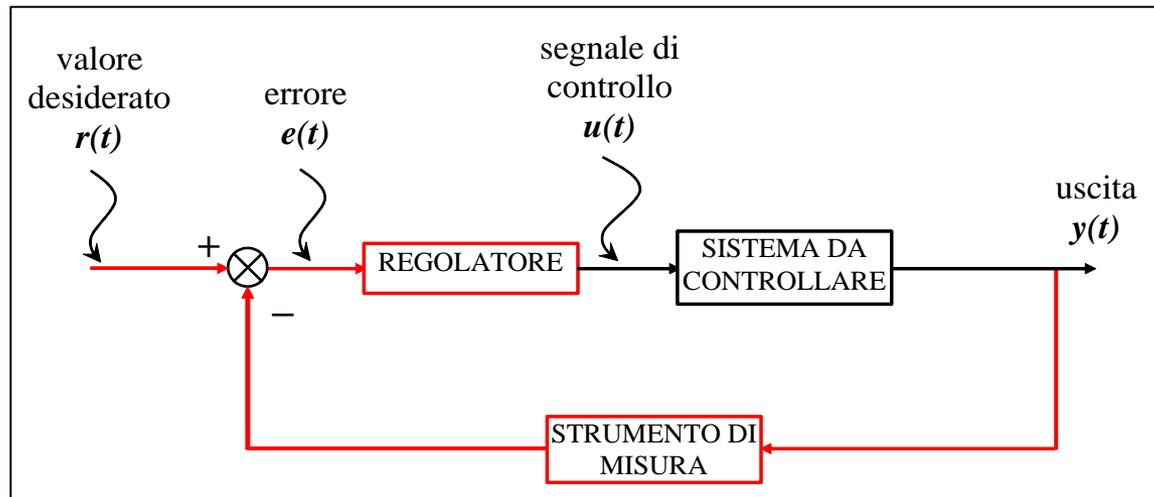
Inoltre ottenere la risposta a gradino nel tempo, antitrasformando la  $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)/s$ .

# Dai sistemi dinamici “generalì” ai sistemi dinamici con retroazione

Prendiamo un sistema dinamico (es. motore – carico):

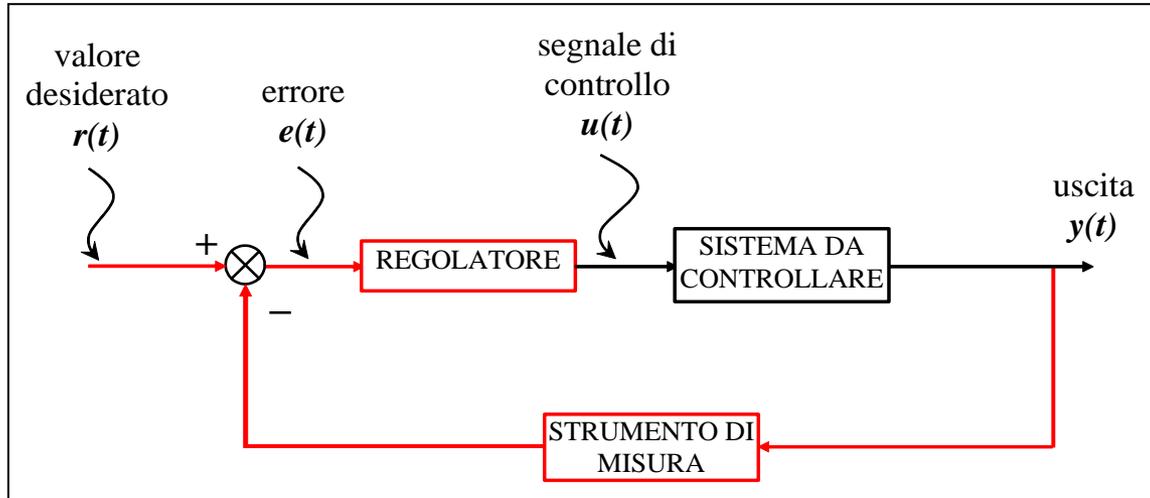


Come evidenziato dai risultati di precedenti esercizi, la relazione che lega l’ingresso all’uscita di un sistema dinamico può essere non soddisfacente (v. ad esempio  $V_a - \theta$  per il sistema motore carico). La teoria dei controlli automatici stabilisce che si può ottenere un miglioramento delle prestazioni passando da uno schema come quello della figura in alto (in *ciclo aperto*) a quello della figura sottostante, in cui è introdotta una *retroazione* che genera un *ciclo chiuso*.



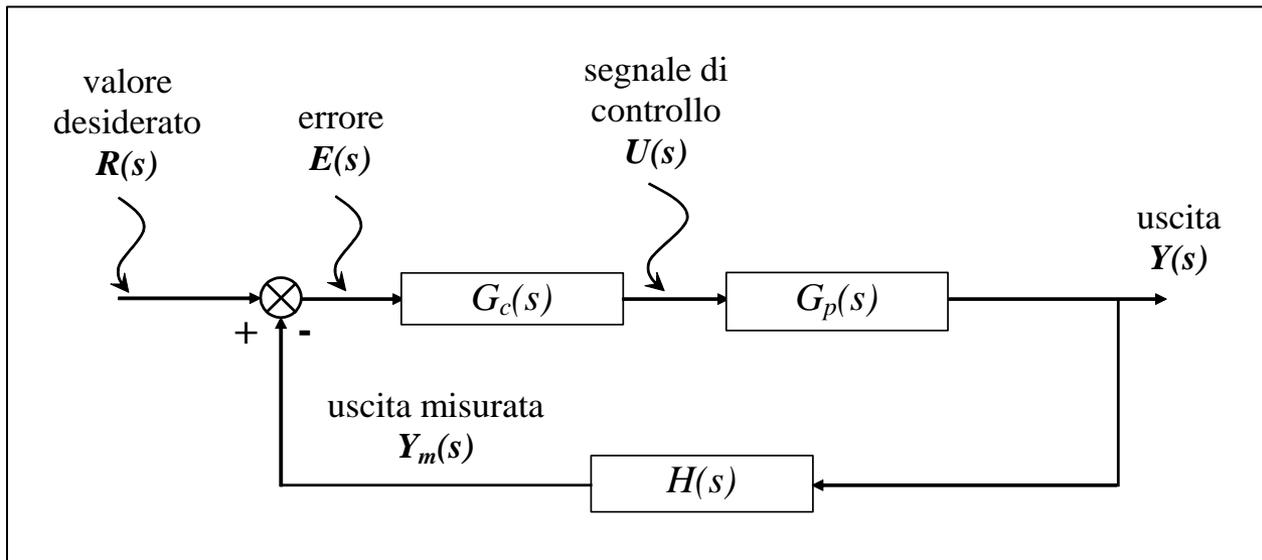
# Sistemi in ciclo chiuso: definizioni

Prendiamo il sistema generale in catena chiusa, e rappresentiamolo in termini di F.T.:



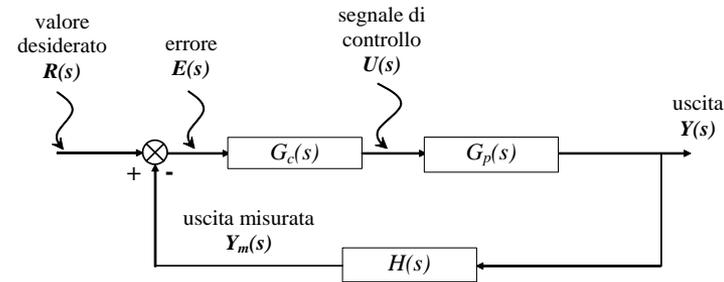
Essendo:

- $G_p(s)$  la F.T. del sistema da controllare;
- $G_c(s)$  la F.T. del sistema di controllo (rete di correzione);
- $H(s)$  la F.T. del sistema di misura.



# Sistemi in ciclo chiuso: relazioni fra le funzioni di trasferta

Ricaviamo i legami fra le varie grandezze per lo schema a blocchi del sistema in ciclo chiuso:



$$E = R - Y_m$$

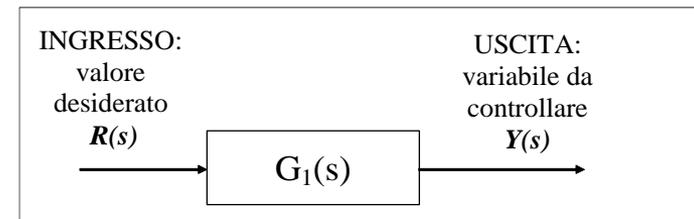
$$Y_m = G_c G_p H E \quad \Rightarrow \quad E = R - G_c G_p H E \quad \Rightarrow \quad E = R / (1 + G_c G_p H)$$

$$Y = G_c G_p E \quad \Rightarrow \quad Y = R [G_c G_p / (1 + G_c G_p H)]$$

## Definizioni importanti:

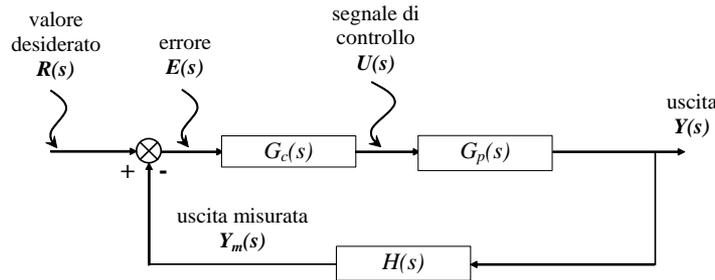
- il percorso da  $E$  a  $Y$  si definisce *catena diretta* ( $G = G_c G_p$  è la **F.T. in catena diretta**)
- il percorso da  $Y$  a  $Y_m$  si definisce *catena di retroazione* ( $H$  è la **F.T. in catena di retroazione**)
- il percorso da  $E$  a  $Y_m$  si definisce *catena aperta* ( $GH = G_c G_p H$  è la **F.T. in catena aperta, FTCA**)
- definendo  $G = G_c G_p$  la funzione di trasferta complessiva della catena diretta, si perviene alla classica relazione che stabilisce il legame fra ingresso ed uscita di un sistema con retroazione:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



La funzione di trasferta  $G_1$  è detta **funzione di trasferta in ciclo chiuso (FTCC)**, e definisce la relazione dinamica fra il valore desiderato (riferimento  $r$ ) e l'uscita (variabile  $y$ ), in presenza della retroazione, della catena di misura  $H$  e del regolatore  $G_c$ .

## Sistemi in ciclo chiuso: relazioni fra le funzioni di trasferta



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

essendo  $G(s) = G_c(s)G_p(s)$

$G_1 = \text{F.T. in ciclo chiuso}$

Ulteriore proprietà dello schema soprastante: in generale, il legame fra l'ingresso  $R$  ed una qualunque delle grandezze nello schema a blocchi si ottiene costruendo una F.T. che ha:

1. come denominatore: **1 + prodotto di tutte le F.T. del ciclo chiuso;**
2. come numeratore: **prodotto di tutte le F.T. che si incontrano andando dall'ingresso  $R$  al segnale prescelto.**

Ad esempio, si ha  $Y_m/R = GH / (1 + GH)$

Altre interessanti relazioni fra segnali sono:

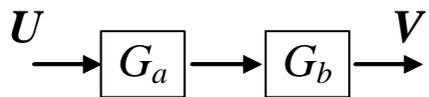
Legame (CC) fra ingresso ed errore

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

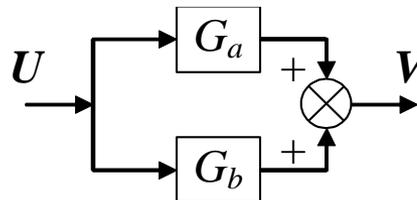
Legame (CC) fra ingresso e segnale di controllo

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

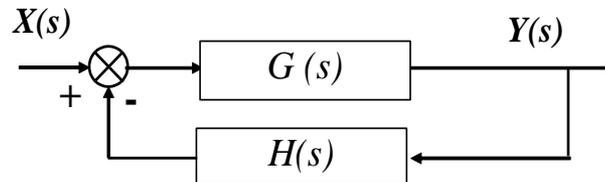
# Regole di manipolazione degli schemi a blocchi



$$V = G_b G_a U$$

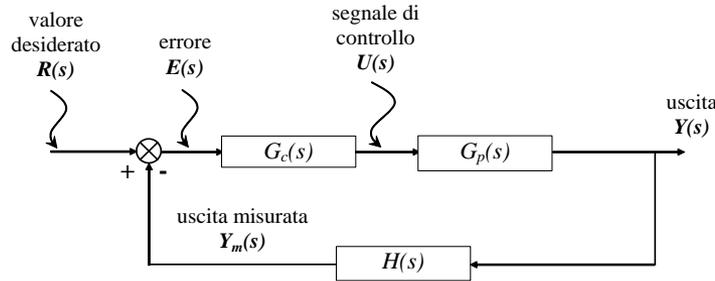


$$V = (G_a + G_b) U$$



$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s)$$

# Tracciamento approssimato della F.T. in ciclo chiuso ( $G_1$ )



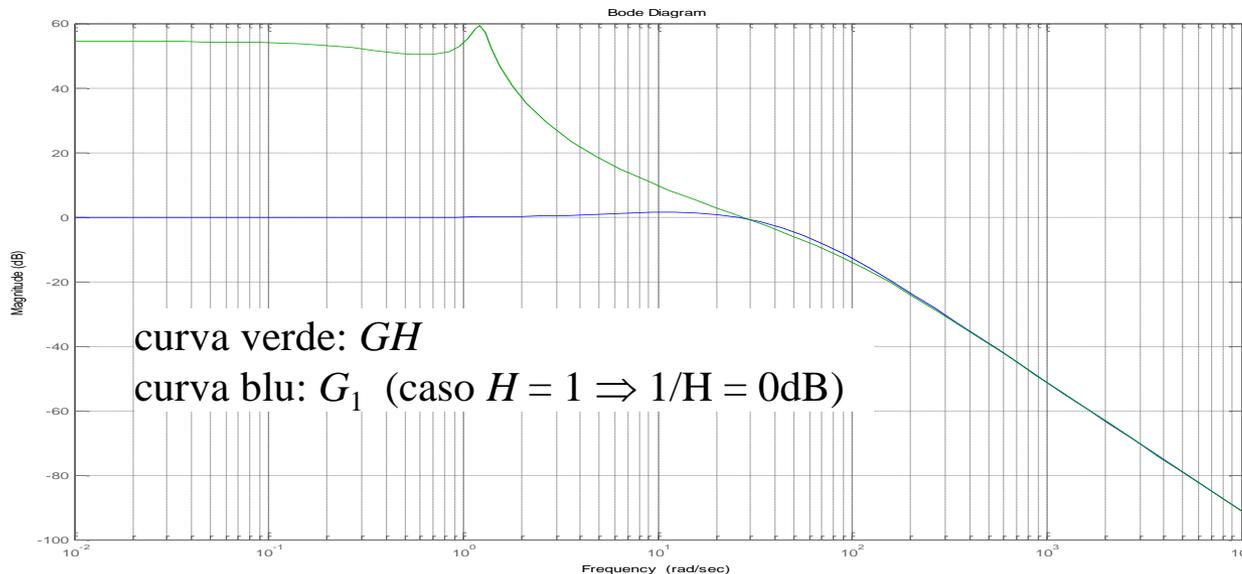
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si suppongano note le F.T. in ciclo aperto  $G$  e  $H$  e si voglia prevedere qualitativamente la risposta in frequenza del sistema in ciclo chiuso  $G_1$ .

Assumendo  $GH \gg 1$  in bassa frequenza e  $GH \ll 1$  in alta frequenza, ed essendo:

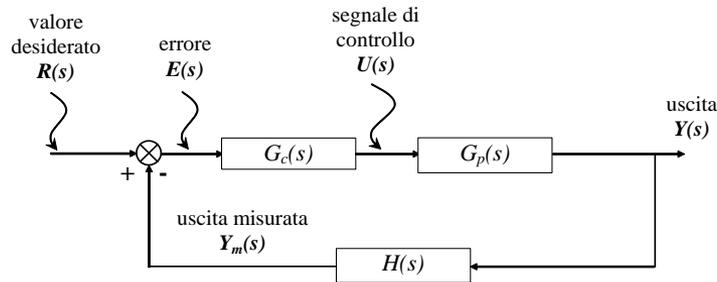
$$Y/R = G / (1 + GH), \quad \text{si ricava:}$$

- in bassa frequenza  $GH \gg 1 \Rightarrow Y/R \approx 1/H$  (caso notevole: se  $H = 1, Y/R = 1$ )
- in alta frequenza  $GH \ll 1 \Rightarrow Y/R \approx G$



*Spunto di riflessione:*  
guardando il diagramma di Bode, cosa si deduce in merito alla relazione fra ingresso ed uscita del sistema in ciclo chiuso (curva blu)?

## Stabilità del sistema in ciclo chiuso



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Secondo le definizioni date di stabilità, il sistema retroazionato  $G_1$  sarà stabile se i suoi poli, ovvero le radici dell'equazione

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

hanno parte reale negativa.

Ovviamente, il valore di tali poli dipende dalle F.T.  $G$  e  $H$ .

Un possibile approccio allo studio della stabilità della  $G_1$  (FTCC) è proprio basato sul calcolo della  $G_1$  e dei relativi poli. Ad esempio ciò viene fatto quando si applica il **metodo del luogo delle radici**.

L'approccio adottato nel seguito (margine di fase, margine di guadagno, criterio di stabilità di Bode, ecc.) è basato invece sullo studio della risposta in frequenza di  $GH$  (FTCA), che noi rappresenteremo con il diagramma di Bode. Come si vedrà, da questa funzione sarà possibile dedurre le proprietà più importanti della corrispondente  $G_1$ .

## Stabilità del sistema in ciclo chiuso - nota

Si è detto che i poli della FTCC  $G_I$  si ottengono dalla seguente equazione:

$$\mathbf{1 + G(s)H(s) = 0}$$

Si potrebbe notare che  $G$  e  $H$  non sono polinomi in  $s$ , ma rapporti di polinomi in  $s$ . Ciò non costituisce un problema, infatti:

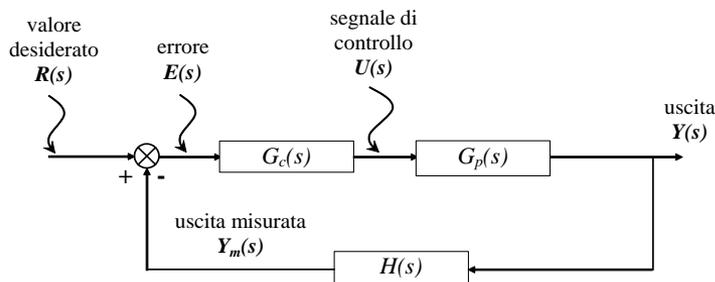
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_I = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{NumG(s)}{DenG(s)}}{1 + \frac{NumG(s)}{DenG(s)} \frac{NumH(s)}{DenH(s)}} = \frac{NumG(s)DenH(s)}{DenG(s)DenH(s) + NumG(s)NumH(s)}$$

Imponendo  $1 + G(s)H(s) = 0$  si ottengono proprio i poli della  $G_I$ , infatti:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{NumG(s)}{DenG(s)} \frac{NumH(s)}{DenH(s)} = \frac{DenG(s)DenH(s) + NumG(s)NumH(s)}{DenG(s)DenH(s)} = 0$$

$$\Rightarrow DenG(s)DenH(s) + NumG(s)NumH(s) = 0$$

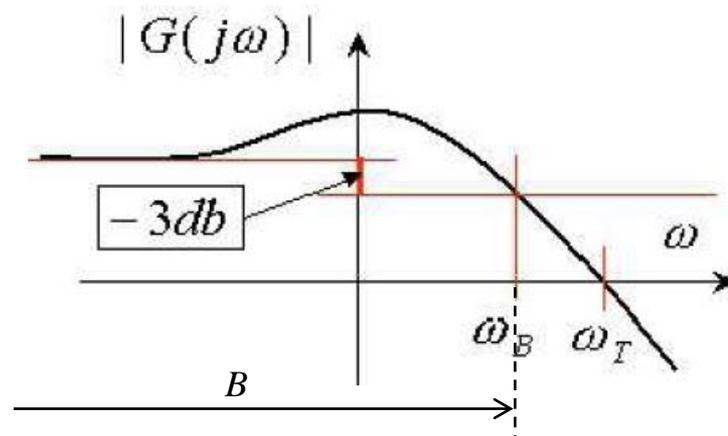
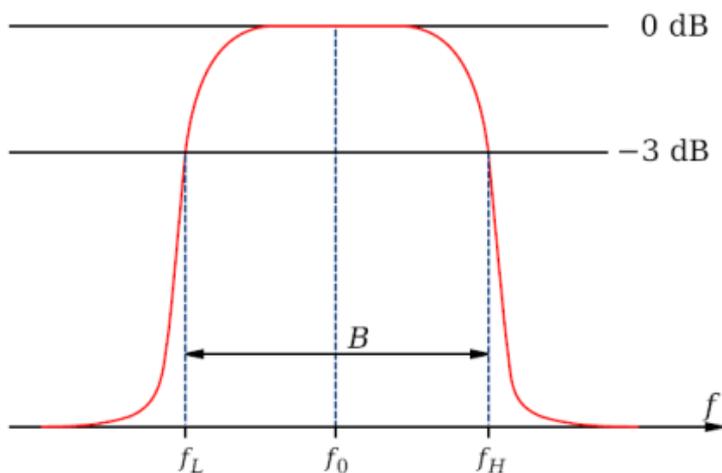
## Pulsazione di taglio e banda passante



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Definiamo:

- **pulsazione di taglio** di una F.T. ( $\omega_T$ ): il valore della pulsazione corrispondente ad una ampiezza di  $GH$  di 0 dB (tale pulsazione è denominata in questo modo perché divide la regione in cui il segnale di ingresso è amplificato da quella in cui è attenuato);
- **banda passante**: il range di pulsazioni per il quale il guadagno di una F.T. è maggiore di  $-3$  dB del valore «di lavoro» ( $B$  in figura; a sinistro caso di filtro passabanda, a destra caso tipico di una FTCA).



# Margine di fase (MF) e margine di guadagno (MG)

Definiamo quindi due importanti grandezze calcolabili per una F.T. in ciclo aperto  $GH$ :

- **MARGINE DI FASE MF:  $180^\circ$  + il valore della fase di  $GH$  alla pulsazione di taglio, alla quale il guadagno è unitario (0 dB)**

$$MF = 180^\circ + \angle GH(j\omega_T)$$

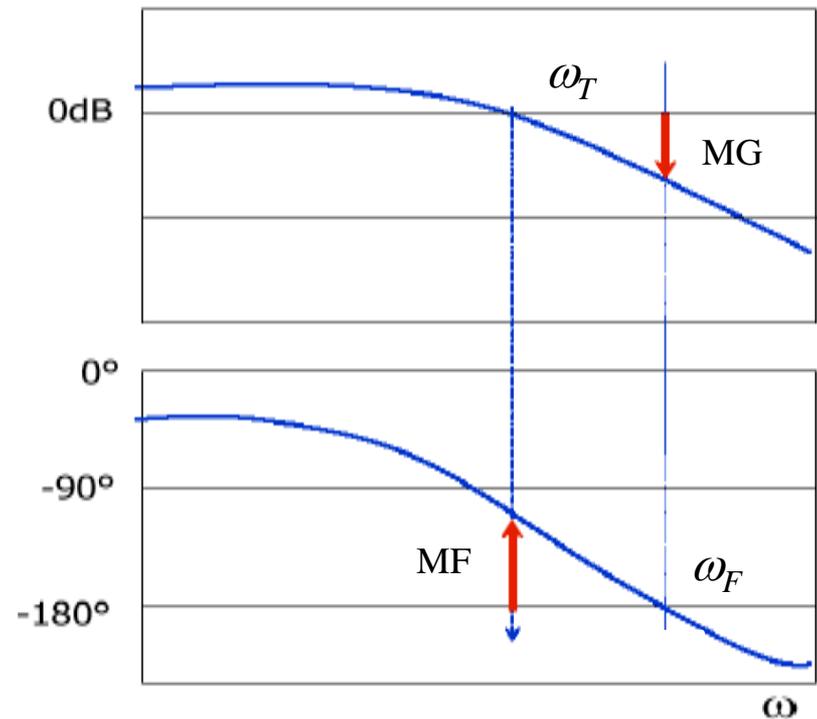
- **MARGINE DI GUADAGNO MG: il valore del guadagno di  $GH$  (in dB), cambiato di segno, alla pulsazione  $\omega_F$  alla quale la fase è  $-180^\circ$**

$$MG = - |GH(j\omega_F)|_{dB}$$

Nota: ragionando sui grafici a fianco, si comprende che MF ed MG hanno sempre lo stesso segno, che è positivo nella condizione rappresentata in figura:

$$MF = 180^\circ + (-110^\circ) = 70^\circ$$

$$|GH(j\omega_F)|_{dB} < 0 \rightarrow MG = - |GH(j\omega_F)|_{dB} > 0$$



# Note su MF ed MG

## PRIMA OSSERVAZIONE

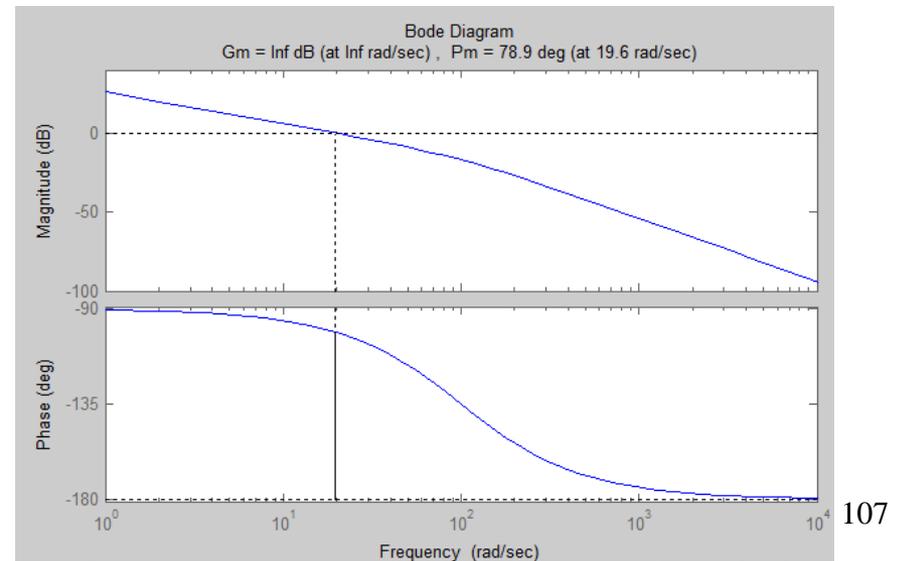
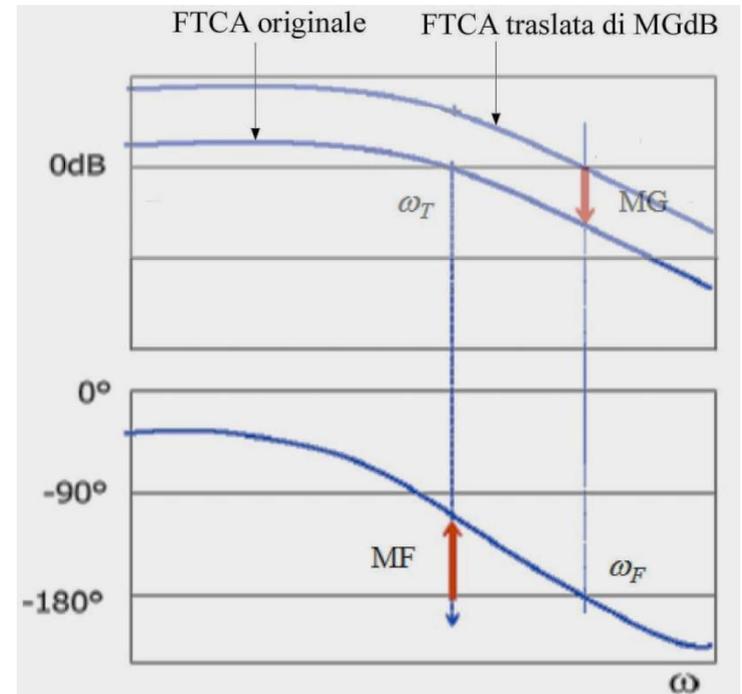
- immaginiamo di moltiplicare la  $GH$  di figura per un guadagno reale  $k$ , positivo e  $> 1$
- questo alza il grafico del guadagno di  $k$  dB
- invece il grafico della fase rimane invariato
- incrementando progressivamente  $k$ ,  $\omega_T$  si sposta progressivamente verso  $\omega_F$ , e questo fa diminuire progressivamente MF ed MG
- quando l'incremento di  $k$  ha reso  $\omega_T$  coincidente con  $\omega_F$ , e ciò avviene per  $k = MG$ , il MF e il MG della funzione ottenuta sono diventati contemporaneamente nulli

Quindi il significato di MG è la *variazione di guadagno in dB* che devo applicare alla F.T.  $GH$  originale per ottenere una funzione con fase in  $\omega_T$  uguale a  $-180^\circ$ , ovvero  $MF = 0^\circ$ .

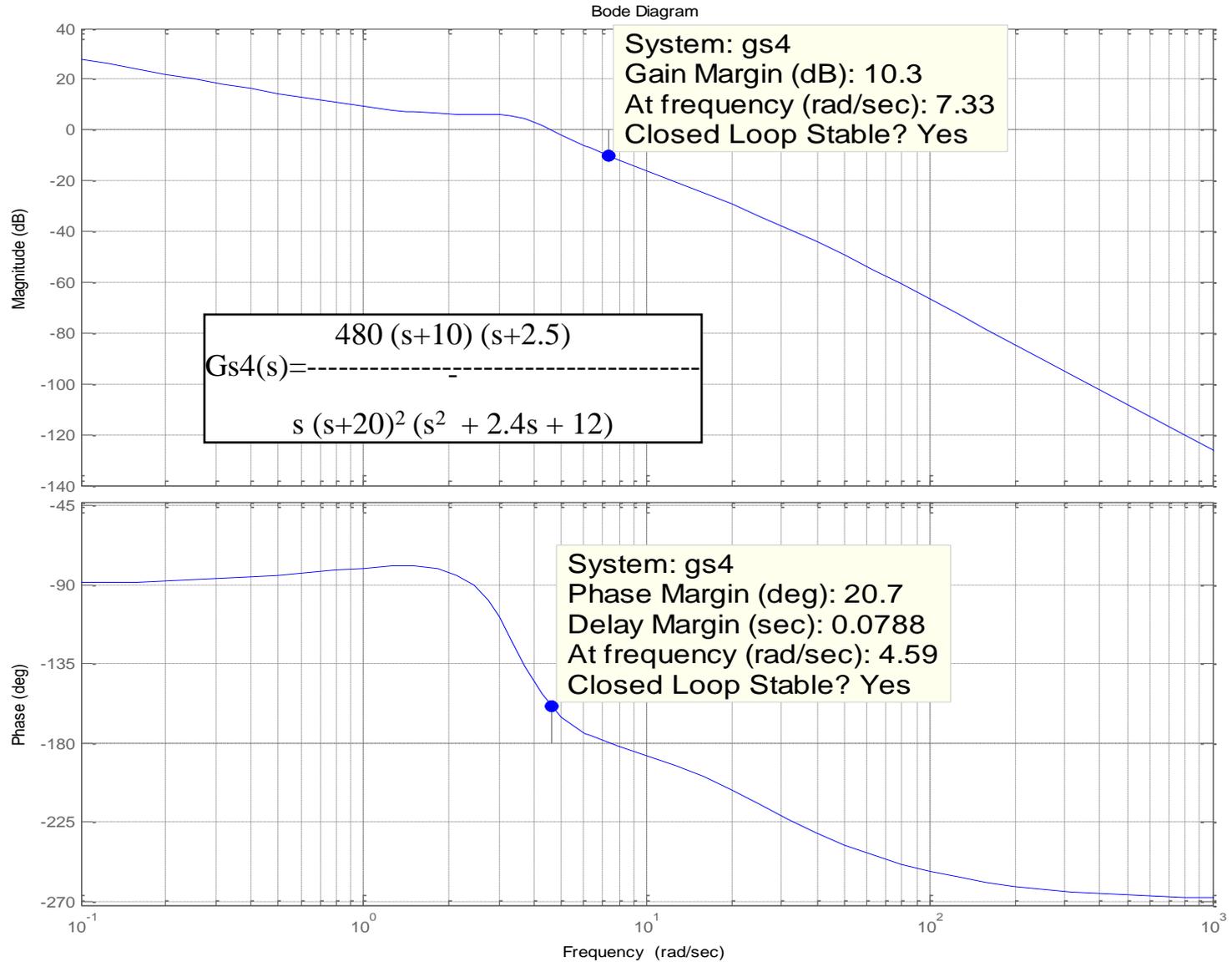
Se applicassi una variazione di guadagno maggiore alla funzione originale, il MF diventerebbe negativo.

## SECONDA OSSERVAZIONE

Se la fase tende asintoticamente a  $-90^\circ$  o a  $-180^\circ$ , senza mai raggiungere  $-180^\circ$ , si può aumentare il guadagno all'infinito, ma il MF non arriva mai a  $0^\circ$ ; pertanto il MG è infinito (ad esempio ciò avviene per la FTCA a lato).



# Esempio di MF e MG



## Metodo di calcolo del margine di fase

Il margine di fase è ricavabile con buona approssimazione nel seguente modo:

- si traccia su carta logaritmica l'andamento asintotico dell'ampiezza della FTCA
- dall'andamento asintotico si ricava la  $\omega_T$  (si ricorda che l'andamento asintotico è meno fedele vicino a poli e zeri reali, ma soprattutto vicino a poli complessi coniugati)
- si calcola la fase della FTCA per la pulsazione di taglio, ovvero  $\angle GH(j\omega_T)$ , sommando i contributi dei diversi termini:
  - per sistemi **di tipo 0, 1, 2, ovvero con 0, 1, 2 poli nulli**, una costante  $0^\circ, -90^\circ, -180^\circ$
  - per ogni zero reale con costante di tempo  $T_{ni}$ :  $+\arctan(\omega_T T_{ni})$
  - per ogni polo reale con costante di tempo  $T_{di}$ :  $-\arctan(\omega_T T_{di})$
  - per le coppie di poli complessi coniugati (gli zeri complessi coniugati sono molto rari):

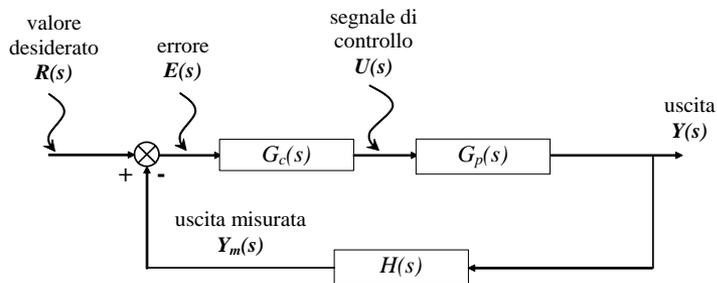
$$-\arctan \frac{\left( \frac{2\zeta\omega_T}{\omega_n} \right)}{\left( 1 - \frac{\omega_T^2}{\omega_n^2} \right)} = -\arctan \frac{2\zeta\omega_T\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_T^2}$$

- infine MF =  $180^\circ + \angle GH(j\omega_T)$

**Nota pratica:** per le coppie di poli complessi coniugati, corrispondenti ad un termine del secondo ordine sottosmorzato, il contributo alla fase varia tra  $0^\circ$  e  $-180^\circ$ ; a livello operativo, se il risultato del calcolo viene al di fuori di questo intervallo, bisogna aggiungere o togliere  $180^\circ$  al risultato ottenuto numericamente fino a riportarlo a questo intervallo; questo è dovuto al fatto che:

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha - 180^\circ) = \tan(\alpha + 180^\circ)$$

## Stabilità del sistema in ciclo chiuso: criterio di stabilità di Bode



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Il criterio stabilità di Bode (qui non dimostrato) afferma che, **se il sistema rispetta le seguenti ipotesi:**

- **la FTCA ( $GH$ ) non ha poli a parte reale positiva** (non è instabile)
- **il diagramma di Bode del modulo di  $GH(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB una sola volta** (in discesa)

**allora condizione sufficiente affinché il sistema in ciclo chiuso ( $G_1$ ) sia stabile è che i margini di fase MF e di guadagno MG siano positivi.**

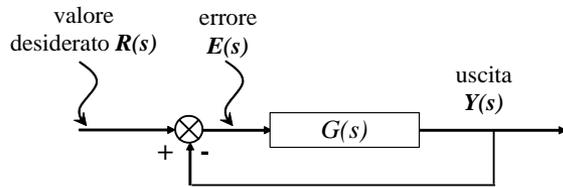
Pertanto, se la funzione  $GH$  ha MF e MG positivi, la funzione  $G_1$  avrà poli con parte reale negativa, mentre in caso contrario (MF, MG < 0) la  $G_1$  avrà poli con parte reale positiva. Questa proprietà matematica andrà applicata in modo "ingegneristico" scegliendo una  $G_C$  tale da assicurare che il sistema regolato sia "sufficientemente" stabile.

*Note: 1) il criterio di stabilità di Bode può essere applicato solo a sistemi già non instabili in ciclo aperto (che peraltro sono molti); per sistemi non stabili in ciclo aperto è necessario usare altri metodi di studio della stabilità;*

*2) MF ed MG sono basati sulla FTCA, ma il criterio trae conclusioni sulla FTCC.*

## Errori a regime e tipo del sistema (1)

Prendiamo in considerazione un sistema con **retroazione unitaria** (caso molto frequente: si ipotizza un *sensore ideale*), e supponiamo che abbia come ingresso  $r(t)$ , rispettivamente, un gradino, una rampa e un'accelerazione costante; si vogliono determinare gli errori a regime del sistema in ciclo chiuso.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad \frac{E(s)}{R(s)} = G_{E1} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

I tre ingressi e le loro trasformate saranno, rispettivamente:

- gradino:  $r_0(t) = C_0 \quad \rightarrow \quad R_0(s) = C_0/s$
- rampa:  $r_1(t) = C_1 t \quad \rightarrow \quad R_1(s) = C_1/s^2$
- accelerazione:  $r_2(t) = C_2 t^2/2 \quad \rightarrow \quad R_2(s) = C_2/s^3$

Esaminiamo tre casi per  $G(s)$ , nelle seguenti tre forme (già esaminate in precedenza):

**Sistema di tipo 0:**  $G_0(s) = k_p \frac{(1 + sT_{n1}) \dots (1 + sT_{nm})}{(1 + sT_{d1}) \dots (1 + sT_{dn})}$

**Sistema di tipo 1:**  $G_1(s) = k_v \frac{(1 + sT_{n1}) \dots (1 + sT_{nm})}{s(1 + sT_{d1}) \dots (1 + sT_{dn})}$  (sistema con un integratore puro)

**Sistema di tipo 2:**  $G_2(s) = k_a \frac{(1 + sT_{n1}) \dots (1 + sT_{nm})}{s^2(1 + sT_{d1}) \dots (1 + sT_{dn})}$  (sistema con due integratori puri)

## Errori a regime e tipo del sistema (2)

Incrociamo i tre tipi di ingresso con i tre tipi di sistema; applicando il teorema del valore finale calcoliamo l'errore a regime nei 9 casi possibili:

|                               | gradino $R_0(s)$  | rampa $R_1(s)$   | accelerazione $R_2(s)$   |
|-------------------------------|---|--|--|
| <b>tipo 0</b><br><br>$G_0(s)$ | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) \frac{C_0}{s}$ $\frac{e_{reg}}{C_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_p \frac{(1+sT_{n1})\dots}{(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+k_p}$ | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) \frac{C_1}{s^2}$ $\frac{e_{reg}}{C_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_p \frac{(1+sT_{n1})\dots}{(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^2} = \infty$         | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E0}(s) \frac{C_2}{s^3}$ $\frac{e_{reg}}{C_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_p \frac{(1+sT_{n1})\dots}{(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^3} = \infty$           |
| <b>tipo 1</b><br><br>$G_1(s)$ | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) \frac{C_0}{s}$ $\frac{e_{reg}}{C_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_v \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s} = 0$              | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) \frac{C_1}{s^2}$ $\frac{e_{reg}}{C_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_v \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{k_v}$ | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E1}(s) \frac{C_2}{s^3}$ $\frac{e_{reg}}{C_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_v \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^3} = \infty$          |
| <b>tipo 2</b><br><br>$G_2(s)$ | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) \frac{C_0}{s}$ $\frac{e_{reg}}{C_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_a \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s^2(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s} = 0$            | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) \frac{C_1}{s^2}$ $\frac{e_{reg}}{C_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_a \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s^2(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^2} = 0$           | $e_{reg} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{E2}(s) \frac{C_2}{s^3}$ $\frac{e_{reg}}{C_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+k_a \frac{(1+sT_{n1})\dots}{s^2(1+sT_{d1})\dots}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{k_a}$ |

## Errori a regime e tipo del sistema (3)

Dalla tabella della pagina precedente si deduce che:

- a) al crescere del tipo i sistemi sono più precisi (errori nulli in più casi)
- b) incrociando sistemi e ingressi "dello stesso ordine" (ad esempio tipo 1 ed ingresso a rampa), si ottengono errori finiti ma non nulli, inversamente proporzionali ai rispettivi guadagni statici (si osservino le caselle sulla diagonale principale della matrice di pagina precedente)
- c) immettendo un segnale di grado più alto del tipo del sistema (ad esempio una rampa in un sistema di tipo 0) si hanno errori a regime che tendono a infinito (il che, in genere, è una prestazione inaccettabile per un sistema regolato)

*Si può concludere che per massimizzare la precisione di un sistema (per rendere, cioè, piccolo il suo errore) è vantaggioso aumentarne il tipo, introducendo degli integratori (termini  $1/s$ ).*

*Come vedremo, tuttavia, questo modo di procedere tende a far diventare instabili i sistemi.*

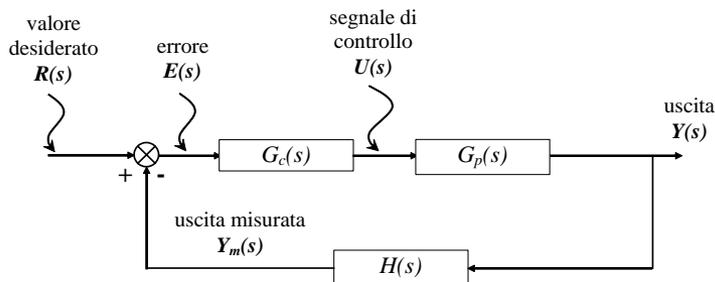
*Come spesso accade nei problemi ingegneristici, la soluzione più corretta sarà un compromesso, in questo caso tra le esigenze, contrastanti, di precisione e stabilità.*

## Specifiche per sistemi controllati (1)

A livello base, le specifiche assegnate per il comportamento dinamico di un sistema in ciclo chiuso  $G_1$ , che devono essere soddisfatte (per quanto possibile) nell'ambito del progetto del sistema di controllo coinvolgono principalmente tre aspetti:

- a) **precisione** (con particolare riferimento ai valori ammissibili degli errori a regime)
- b) **prontezza** (capacità, cioè, di rispondere entro tempi preassegnati a stimoli esterni)
- c) **stabilità** (valori degli overshoot, durata dei transitori, capacità di tollerare variazioni del sistema o indeterminatezze nel modello)

Una volta definite quantitativamente le specifiche sul sistema controllato, è necessario definire il tipo ed i parametri numerici della rete di correzione  $G_C$  che consente al sistema in ciclo chiuso  $G_1$  di avere le prestazioni richieste (se possibile: ovviamente, per quanto un controllo sia fatto bene, non potrà far superare ad un sistema i suoi limiti prestazionali intrinseci).



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1 = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

## Specifiche per sistemi controllati (2)

Nel seguito vi sono esempi di come i tre criteri qualitativi introdotti si tramutano in specifiche quantitative.

**PRECISIONE:** ricordando quanto ottenuto in merito agli errori a regime, si ha che:

1) un sistema può avere errore nullo a regime rispetto a un segnale di un certo tipo (gradino o rampa) se il corrispondente sistema in ciclo aperto è di "tipo" superiore (1 o 2 rispettivamente) al segnale considerato;

2) se non si desidera avere errore a regime nullo (o è impossibile averlo, date le caratteristiche del sistema controllato) si può ridurre il valore dell'errore a regime entro una banda prefissata aumentando sufficientemente il valore del guadagno.

Ad esempio, per errore massimo del 3% ( $e_{\%} = 0.03$ ) per un ingresso a gradino di ampiezza 20, su un sistema di tipo 0, a regime, si avrà:

|                |   |
|----------------|---|
| ingresso       | $C_0 = 20$                                  |
| errore massimo | $e_{reg} = e_{\%} * C_0 = 0.03 * 20 = 0.6$  |
| uscita         | $Y_{reg} = C_0 - e_{reg} = 20 - 0.6 = 19.4$ |

Dalla tabella di pag. 111, per sistema di tipo 0 ed ingresso a gradino, si ricava:

$$e_{reg} = C_0 / (1 + k_p)$$

da cui posso ricavare il valore minimo di  $k_p$  che garantisce la precisione desiderata:

$$k_p = (C_0 - e_{reg}) / e_{reg} = C_0 (1 - e_{\%}) / C_0 e_{\%} = (1 - e_{\%}) / e_{\%}$$

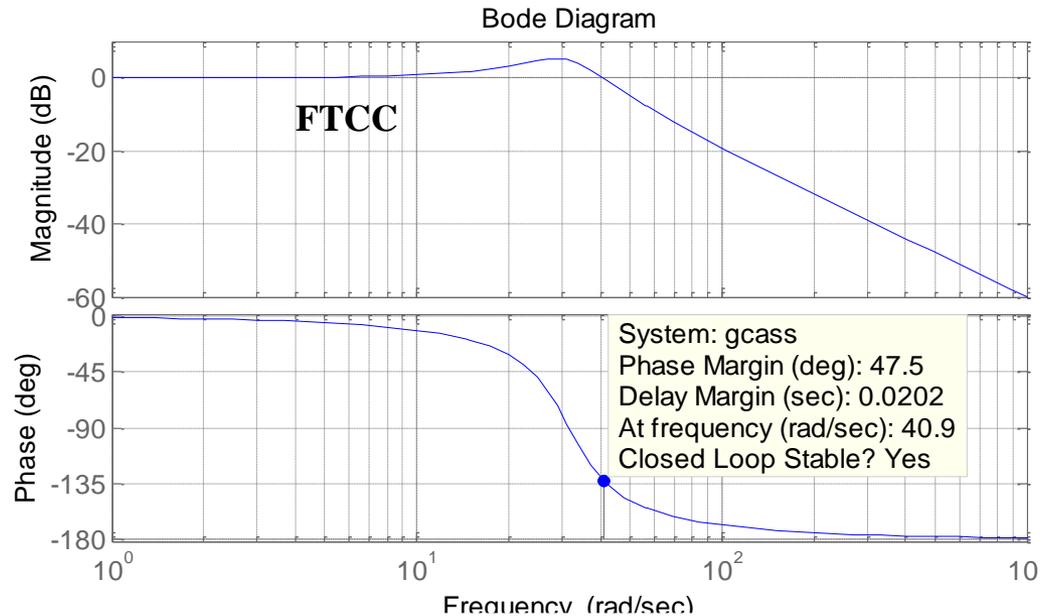
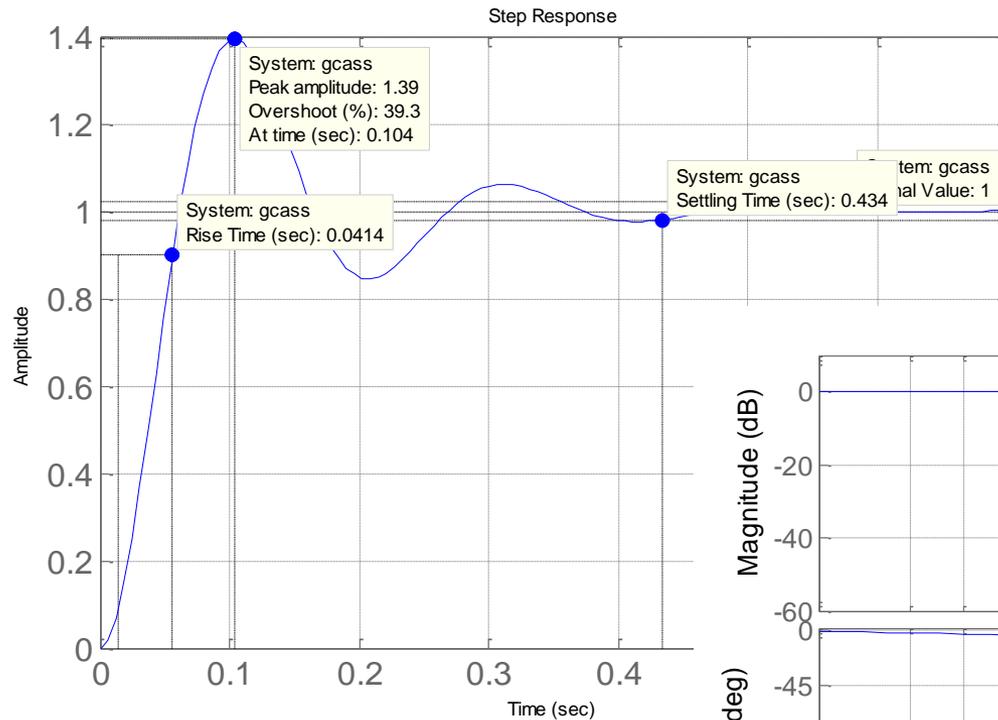
(numericamente, nell'esempio, si ha  $k_p = (1 - 0.03) / 0.03 = 32.333$ )

E' importante osservare che al tendere a zero dell'errore richiesto, il guadagno statico necessario tende a infinito (che è quello che si ha con un sistema di tipo 1).

# Specifiche per sistemi controllati (3)

## PRONTEZZA:

Ritornando alle proprietà dei sistemi di I e II ordine, si ricorda che, nel dominio del tempo, la prontezza di un sistema è principalmente quantificabile attraverso il suo **tempo di salita (rise time)**, v. diagramma sottostante). Nel dominio delle frequenze, ricordiamo che esiste una correlazione fra il tempo di salita e  $\omega_n$  e  $\zeta$ .



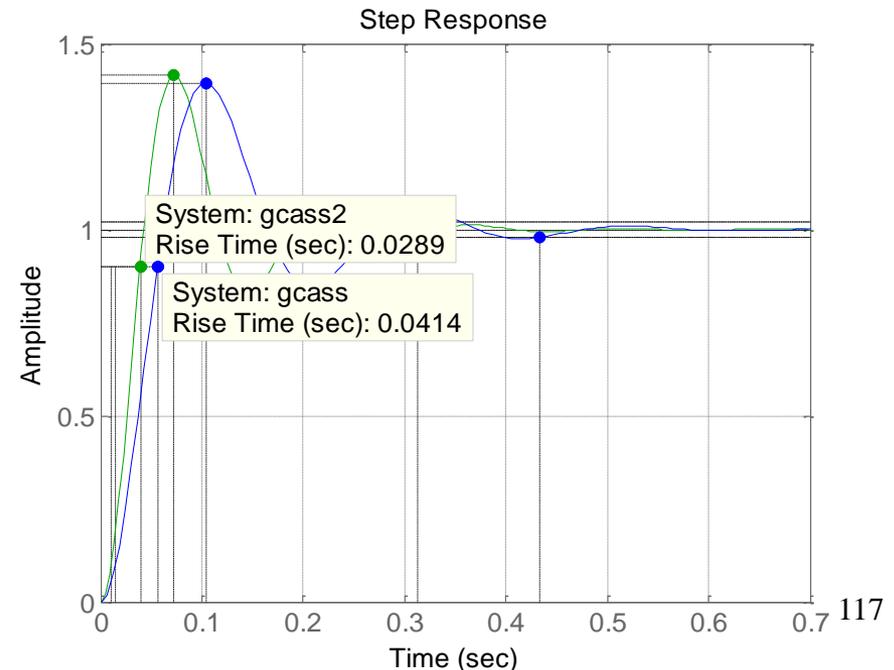
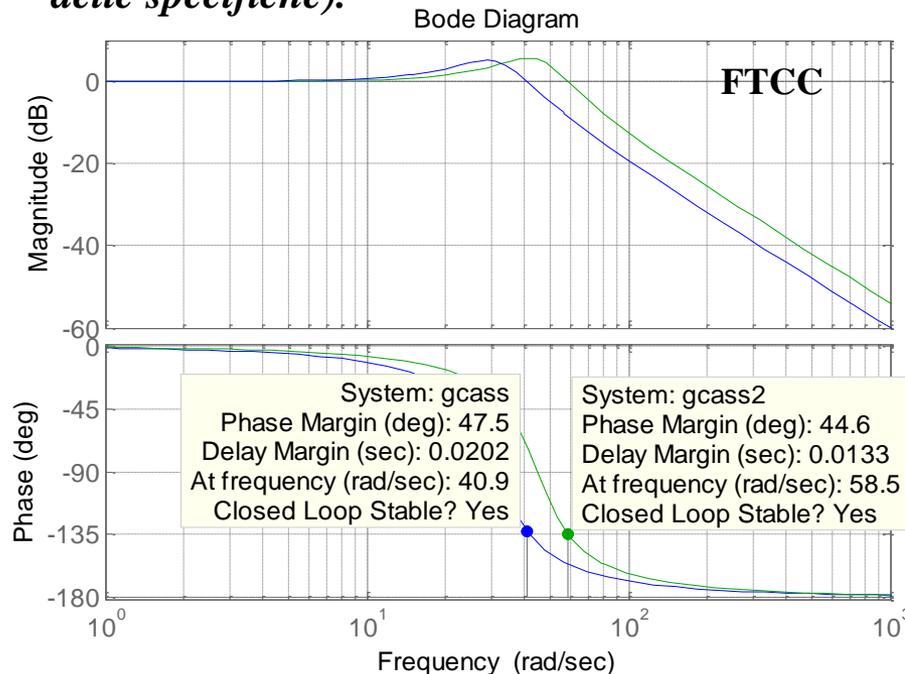
## Specifiche per sistemi controllati (4)

### PRONTEZZA (2):

Inoltre, in generale, si può affermare che un sistema è tanto più veloce (pronto) quanto più alto è il suo range di frequenze utili nella risposta: questo range può essere ragionevolmente stimato prendendo in considerazione la *pulsazione di taglio* di un sistema.

Si conclude, a livello qualitativo, che la massimizzazione della prontezza di un sistema è ottenibile attraverso la massimizzazione della sua pulsazione di taglio o secondo altre definizioni della sua *banda passante*, nell'ambito di valori accettabili della  $\zeta$  del sistema (v. pagina successiva). Nell'esempio in figura, il sistema verde ha una FTCC con banda passante più ampia (pulsazione di taglio maggiore), e nel dominio del tempo si stabilizza prima.

**NOTA: per semplicità, nello studio dei sistemi di controllo il limite della banda passante della FTCC si approssima alla pulsazione di taglio della FTCA (senza considerare i -3dB), il che è cautelativo (la banda passante risulta leggermente minore, a favore della sicurezza nel rispetto delle specifiche).**



## Specifiche per sistemi controllati (5)

### STABILITA' (1):

La *stabilità* è una caratteristica indispensabile al corretto funzionamento di un sistema dinamico. Essa, nelle applicazioni reali, deve essere ottenuta con un certo margine di sicurezza, sia per garantire che il sistema regolato non sia soggetto a oscillazioni troppo ampie o troppo prolungate, sia per assicurare che incertezze o variazioni nei parametri del sistema non ne determinino l'instabilità. In termini operativi, nel dominio delle frequenze, si ottiene questo risultato sintetizzando regolatori che producano *opportuni valori* di MF e MG.

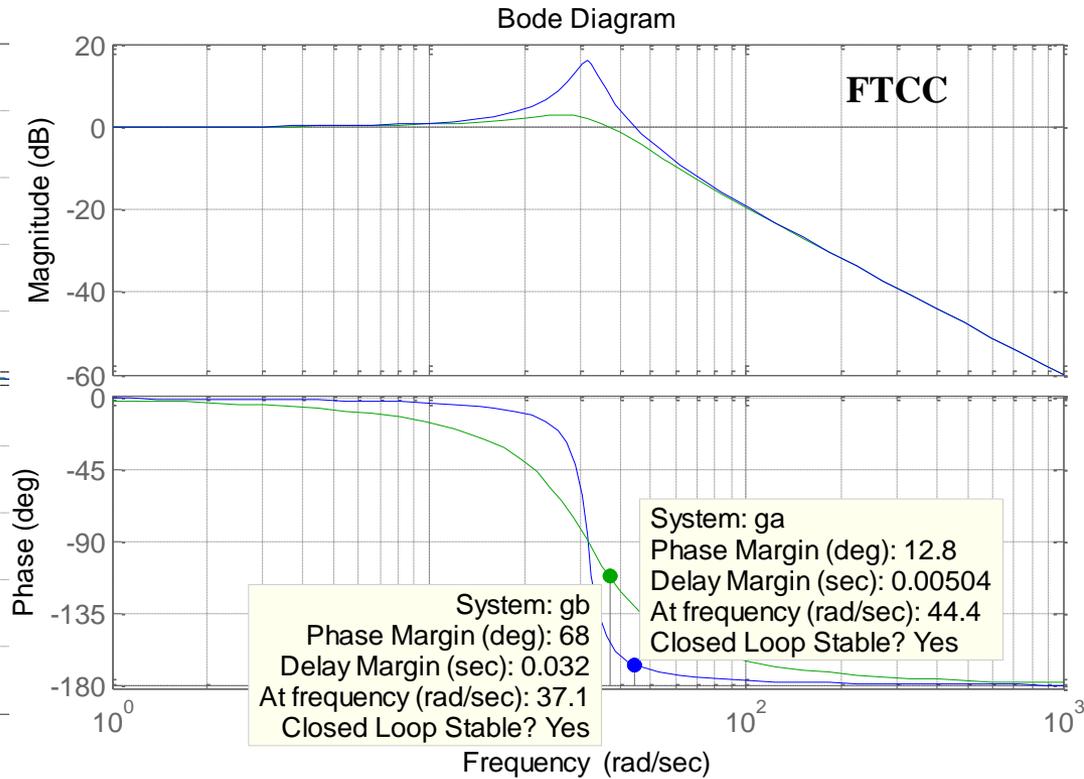
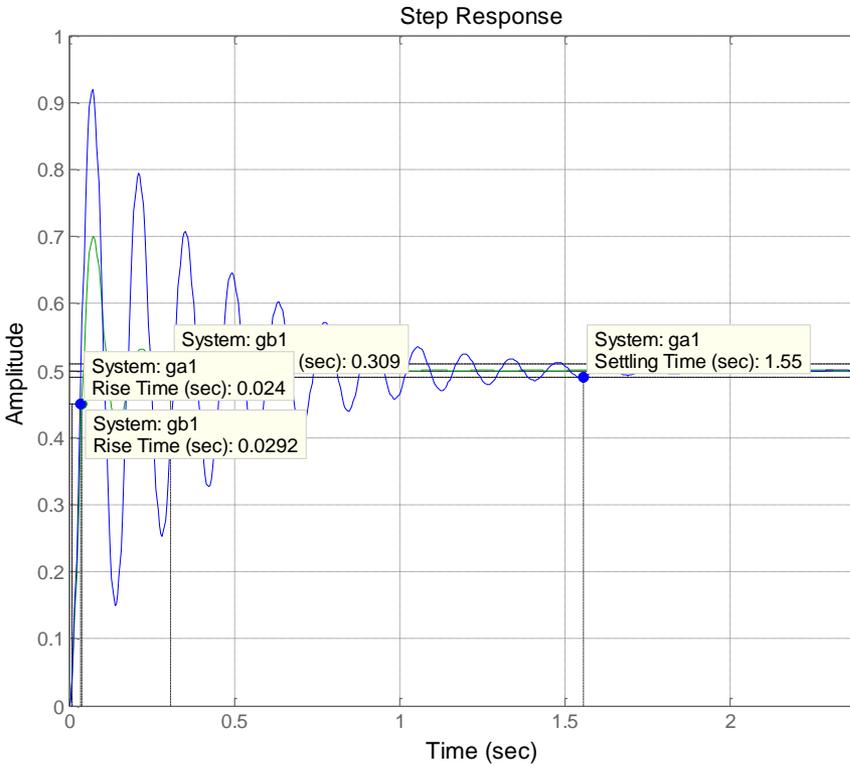
Infatti si può dimostrare che in un ragionevole range di valori, esiste una correlazione fra la  $\zeta$  del sistema regolato e il margine di fase del sistema in ciclo aperto.

**Solitamente, per aver un sistema *ragionevolmente* smorzato ( $0.3 < \zeta < 0.6$ ) sarà necessario avere MF fra  $30^\circ$  e  $60^\circ$  (molto approssimativamente  $MF = \zeta \cdot 100^\circ$ ).**

In linea di massima questi valori di MF, e pertanto, di  $\zeta$ , come discusso relativamente alle proprietà dei sistemi del II ordine, consentono di avere valori di overshoot del sistema in catena chiusa contenuti entro valori accettabili. Ricordiamo che, d'altra parte, una eccessiva stabilità è penalizzante in termini di prontezza della risposta del sistema (v. esempi pagina successiva).

# Specifiche per sistemi controllati (6)

## STABILITA' (2):



## Specifiche per sistemi controllati (7)

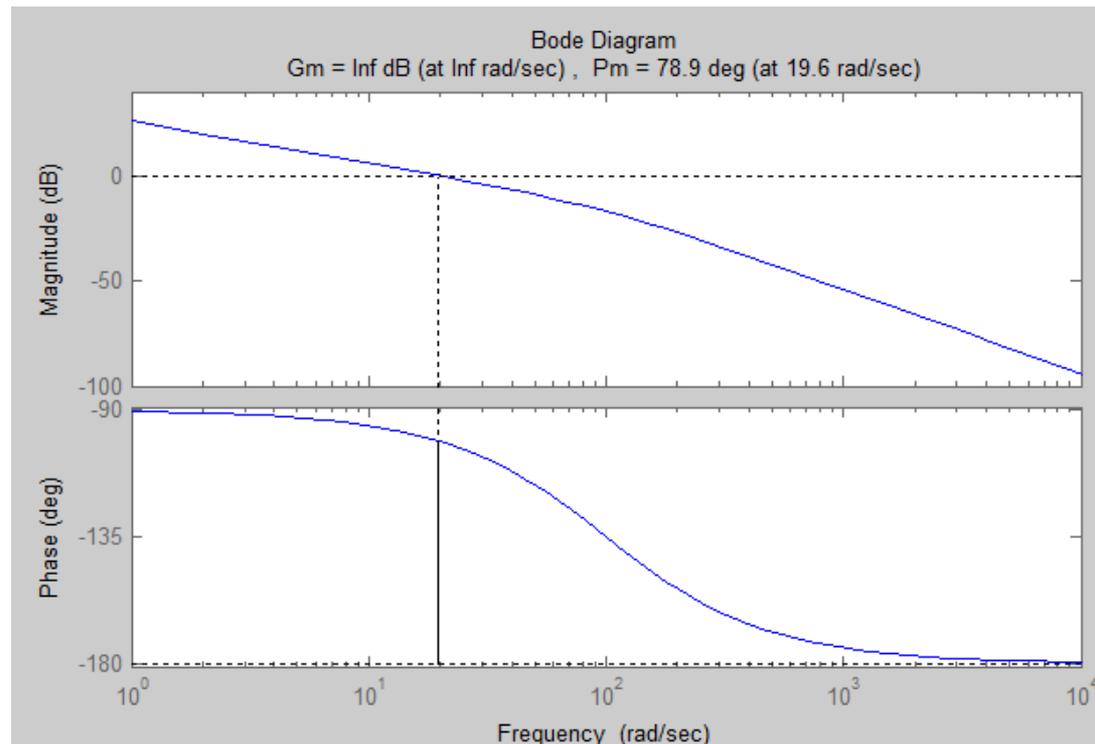
### STABILITA' (3):

I potenziali rischi dovuti all'incertezza e alle variazioni dei parametri fisici sono gestiti garantendo un sufficiente valore al MG: questa grandezza rappresenta, infatti, il valore di incremento del guadagno che porterebbe il sistema all'instabilità. Usualmente si accetta che il MG non debba scendere sotto i 10-12 dB. In generale, il valore del MG non fornisce informazioni sulle caratteristiche dinamiche di un sistema.

Valori appropriati di MG vanno garantiti unicamente per motivi di "sicurezza".

E' opportuno ricordare che i sistemi del primo e del secondo ordine hanno MG infinito: infatti la loro fase non scende mai sotto  $-180^\circ$ .

```
>>margin(ga)
```



## Specifiche per sistemi controllati (8 - riassunto)

In generale, modificando la forma della risposta in frequenza della funzione di trasferta in ciclo aperto è possibile modificare in comportamento del sistema dinamico regolato (cioè della funzione di trasferta in ciclo chiuso):

- **precisione** (con particolare riferimento ai valori ammissibili degli errori a regime)  
In generale essa si migliora (relativamente alle risposte a regime) aumentando il guadagno alle basse frequenze, o, meglio ancora, quando possibile e richiesto, inserendo un regolatore con effetto integrale (aumentando, cioè, il tipo del sistema).
- **prontezza** (capacità, cioè, di rispondere entro tempi preassegnati a stimoli esterni)  
In generale, come criterio di prima approssimazione, essa si migliora aumentando la banda passante del sistema in ciclo chiuso, e ricordando la relazione con la F.T. in ciclo aperto, aumentando la pulsazione di taglio del ciclo aperto.
- **stabilità** (valori degli overshoot, durata dei transitori, capacità di tollerare variazioni del sistema o indeterminatezze nel modello)  
In generale, si migliora la stabilità (entro certi limiti) aumentando il valore del margine di fase (valori ragionevoli sono  $30^\circ - 60^\circ$ ).  
L'imposizione di un valore minimo del margine di guadagno ( $MG > 10 - 12$  dB) garantisce il mantenimento di buone condizioni di stabilità anche in caso di incertezze nel sistema o di variazioni anche significative dei suoi parametri fisici di funzionamento.

*In generale, la massimizzazione di criteri di prontezza e precisione è in contrasto con vincoli sulla stabilità, e viceversa.*

# Tipi di regolatori (1)

Normalmente la F.T. con cui realizzare il regolatore è scelta nell'ambito di una serie limitata di tipi di regolatori (**reti di correzione**) dalle proprietà ben conosciute, ciascuno avente specifiche caratteristiche.

Pertanto, la scelta di un regolatore  $G_c(s)$  prevede tre passi principali:

- 1) scelta del **tipo** di rete di correzione da applicare
- 2) scelta dei **valori numerici** da assegnare al **guadagno** del regolatore e ai **parametri tipici** della rete prescelta
- 3) analisi delle prestazioni del sistema con la rete di correzione

Come già detto, lo scopo di questi tre passi è, ovviamente, quello di ottenere un sistema dinamico in ciclo chiuso che soddisfi le specifiche assegnate.

Molto spesso, i passi 1 e 2 dovranno essere eseguiti più volte, in funzione dell'analisi svolta sui risultati (passo 3) con diverse scelte, prima di poter giungere ad un progetto accettabile del regolatore stesso.

La sintesi di un regolatore non è una procedura "matematica", ma la soluzione di un problema ingegneristico che, come spesso succede, dovrà essere fatta per tentativi.

## Tipi di regolatori (2)

Lo scopo di una rete di regolazione è quello di modificare le caratteristiche dinamiche del sistema in ciclo chiuso.

L'approccio discusso prevalentemente in questo corso si basa sullo studio del diagramma di Bode.

Le reti di correzione, pertanto, sono adottate al fine di modificare la forma della risposta in frequenza (ampiezza e fase) della F.T. in ciclo aperto, al fine di ottenere quanto richiesto dal ciclo chiuso.

Pertanto si dovranno, principalmente osservare e scegliere appropriatamente:

- il guadagno in bassa frequenza, ovvero il tipo del sistema → precisione
- il margine di fase (e di guadagno) → stabilità
- la pulsazione di taglio → prontezza

Una componente sempre presente del regolatore è quella **proporzionale**, grazie alla quale l'errore  $E$  viene amplificato al fine di ottenere il segnale di controllo  $U$ .

Come si deduce facilmente dalle regole base per la costruzione dei diagrammi di Bode, La parte proporzionale di un regolatore (che è una costante moltiplicativa della FTCA) ha l'effetto di alzare (o abbassare) la curva di ampiezza della FTCA senza modificare la curva della fase; pertanto cambia la pulsazione di taglio. Ovviamente, cambiando la pulsazione di taglio, in generale cambia MF.

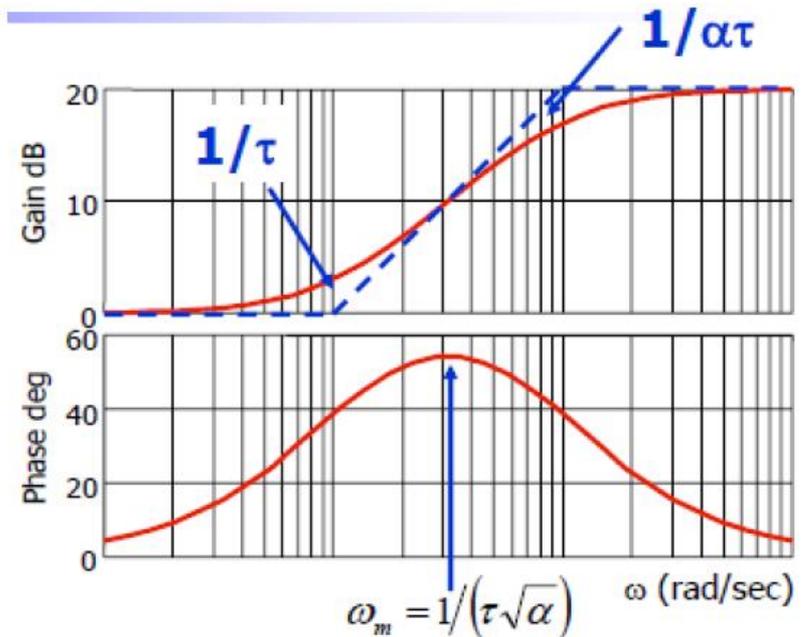
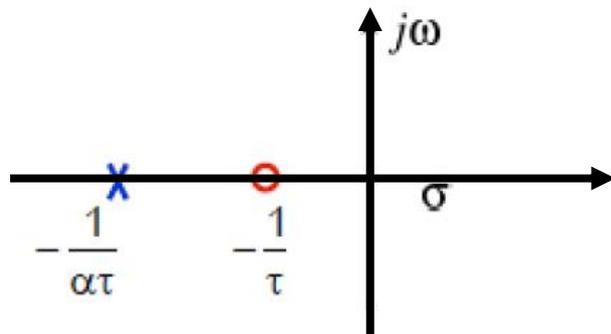
La componente proporzionale può essere usata da sola oppure in combinazione con una rete ad anticipo o ritardo di fase, con una rete a sella o nell'ambito di un regolatore PID (sottocasi: P, PD, PI), discussi nel seguito (per elencare i casi più comuni).

## Tipi di regolatori: rete ad anticipo di fase

Funzione di trasferimento:

$$G_C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Si assume una rete a guadagno statico unitario

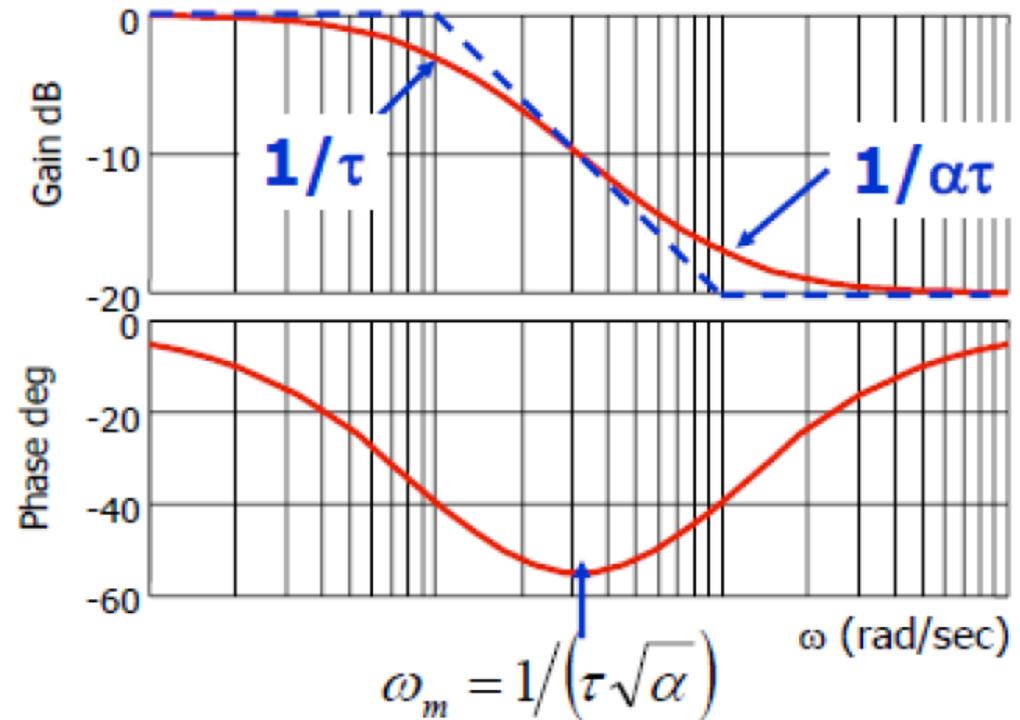
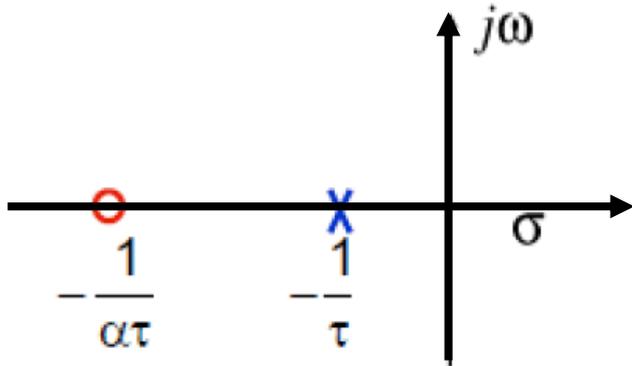


- La rete ad anticipo di fase è praticamente sempre usata in combinazione con guadagno non unitario, che ne alza o abbassa di una costante il grafico del guadagno, senza alterare la fase.
- Nell'esempio in figura la distanza tra zero e polo è una decade, ma può essere di più o di meno; più sono distanti ( $\alpha$  piccolo), più il picco dell'incremento di fase tende a  $+90^\circ$ ; se tendono a coincidere ( $\alpha$  vicino a uno), polo e zero tendono ad annullarsi, il picco tende a zero e la rete tende ad avere effetto nullo.
- La rete aumenta la fase della FTCA, il che di solito è positivo per la stabilità (MF).
- Però aumenta anche il guadagno ad alte frequenze, il che alza la pulsazione di taglio (effetto collaterale).
- In generale, l'opportunità di questa rete va valutata di caso in caso.

## Tipi di regolatori: rete a ritardo di fase

- Funzione di trasferimento

$$G_C(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

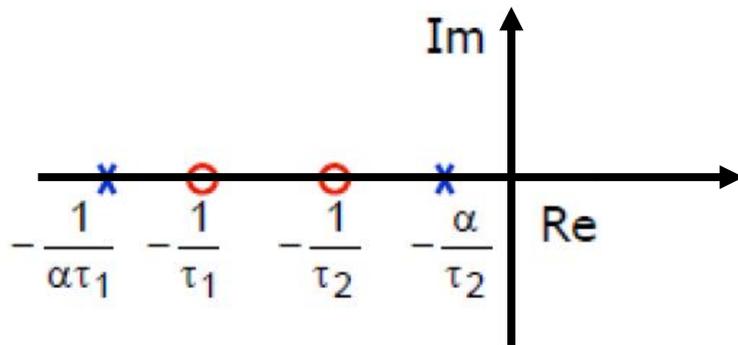


- Anche la rete ad anticipo di fase è praticamente sempre usata in combinazione con guadagno non unitario.
- Analogamente, nell'esempio in figura la distanza tra zero e polo è una decade, ma può essere di più o di meno; più sono distanti ( $\alpha$  piccolo), più il picco del decremento di fase tende a  $-90^\circ$ ; se tendono a coincidere ( $\alpha$  vicino a uno), polo e zero tendono ad annullarsi, il picco tende a zero e la rete tende ad avere effetto nullo.
- La rete riduce il guadagno per alte frequenze, il che spesso può essere utile, ad esempio se serve ridurre la pulsazione di taglio.
- Però peggiora anche la fase (effetto collaterale).
- In generale, l'opportunità di questa rete va valutata di caso in caso.

## Tipi di regolatori: rete a sella simmetrica

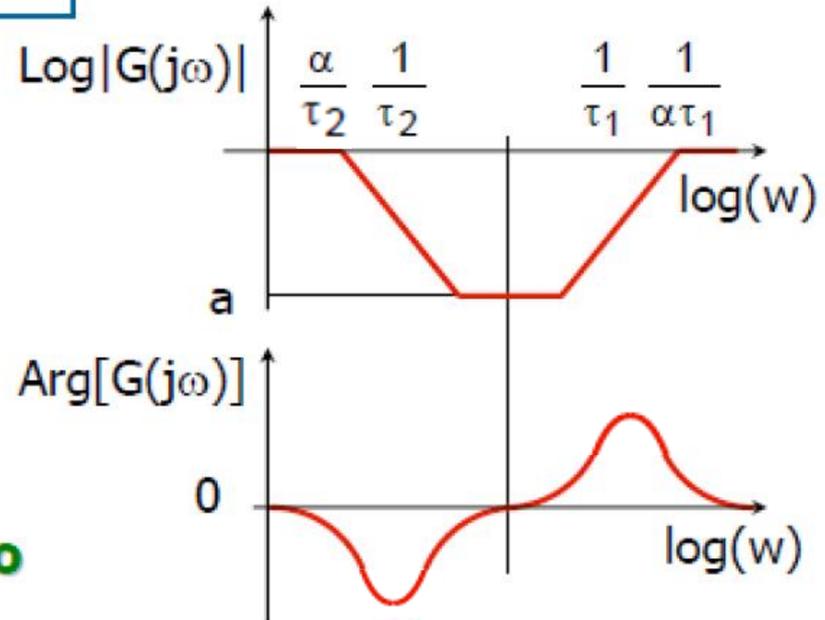
- Funzione di trasferimento

$$G_C(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s)(1 + \tau_2 / \alpha s)} ; \alpha < 1$$



**Unione di rete  
di ritardo e di rete di anticipo**

Diagramma di Bode asintotico



- più difficile da trattare
- combina i vantaggi di una rete a ritardo di fase a quelli di una rete ad anticipo di fase: unita ad una componente proporzionale consente di aumentare il guadagno in bassa frequenza senza modificare (troppo) la banda passante ed il margine di fase

# Tipi di regolatori: rete PID (proporzionale – integrativa - derivativa)

$K_p$  guadagno proporzionale

$K_d$  guadagno derivativo

$K_i$  guadagno integrale

$T_i$  costante di tempo integrale

$T_d$  costante di tempo derivativa

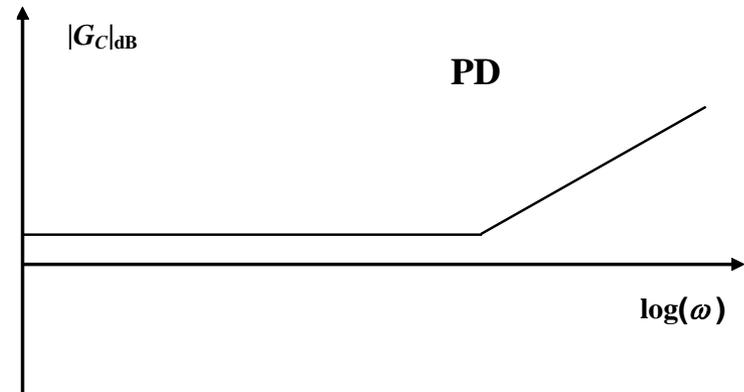
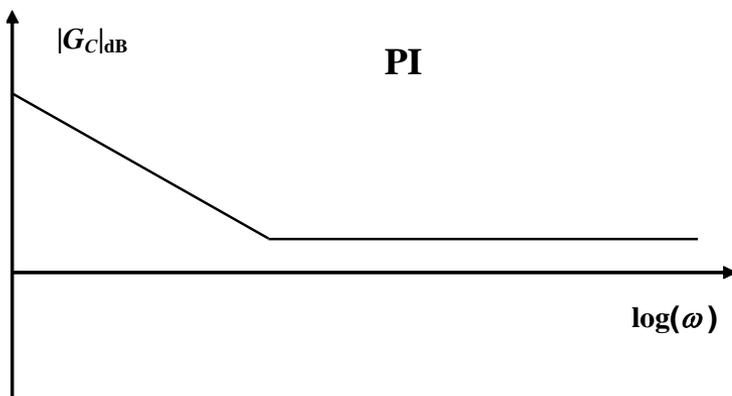
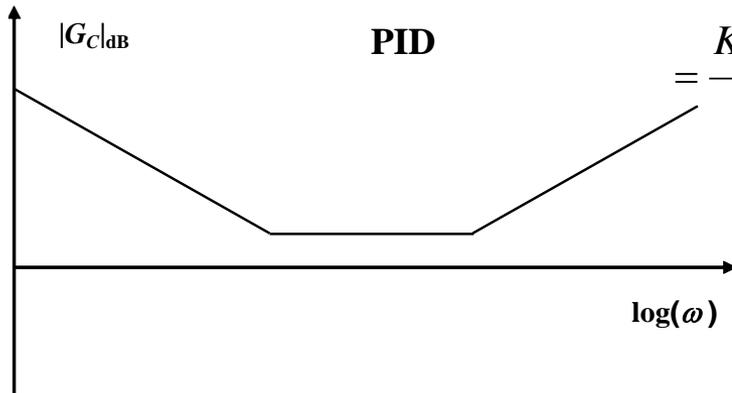
$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) + K_i \int e(\tau) d\tau$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_{PID}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} =$$

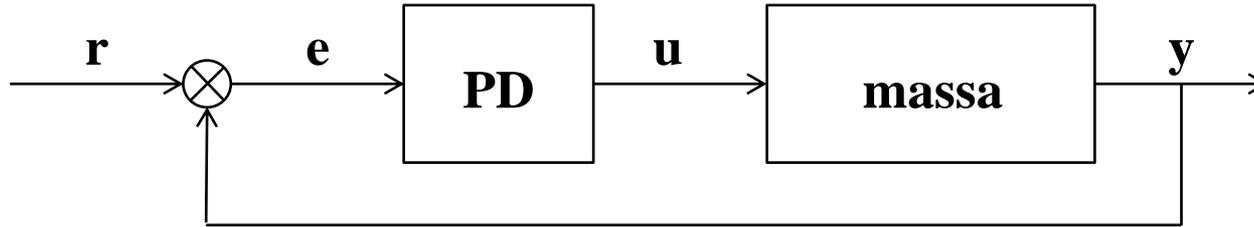
$$= K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) =$$

$$= \frac{K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s}$$

- regolatore PID: tre componenti, proporzionali all'errore, al suo integrale, alla sua derivata
- FT di tipo 1 con 2 zeri reali negativi
- molto spesso usato nei controllori industriali
- è simile ad una rete a sella simmetrica, ma tende ad infinito alle basse ed alle alte frequenze
- la componente integrale cambia il tipo del sistema
- esiste nelle versioni semplificate P (guadagno), PD (FT di tipo 0 con 1 zero), PI (FT di tipo 1 con 1 zero)
- la componente proporzionale c'è praticamente sempre



## Osservazioni sul regolatore PD



- consideriamo una massa che trasla lungo una guida con attrito viscoso, la cui posizione  $y$  lungo la guida è controllata da un regolatore PD che tende a mantenere  $y$  vicino al riferimento  $r$  tramite la forza  $u$ ;

- le equazioni differenziali del sistema sono:  $u(t) = K_p (r - y) + K_d (\dot{r} - \dot{y})$

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} + u(t)$$

- per semplicità consideriamo  $r = 0$ , costante (il regolatore mantiene la massa in posizione di riferimento; non è limitativo che sia zero, perché la posizione dello zero sulla guida è arbitraria); pertanto:

$$m\ddot{y} + (c + K_d) \dot{y} + K_p y = 0$$

- è la stessa equazione di un sistema massa-molla-smorzatore in moto libero; si verifica quindi che:

- il guadagno proporzionale corrisponde alla rigidità di una "molla immaginaria" che mantiene  $y$  vicino ad  $r$
- il guadagno derivativo aumenta lo smorzamento del sistema, se ce n'è già, o lo introduce se non ce n'è; quindi si aggiunge componente derivativa se il sistema con la sola componente proporzionale oscilla troppo
- *attenzione*: se  $c$  è rumore, ad esempio nella misura di  $y$ , la derivata ha dei picchi, quindi nei casi reali bisogna vedere se il guadagno derivativo non dà problemi (cosa che non si può vedere con la trattazione in termini di sistema lineare, che non considera il rumore)

- non esiste invece una analogia fisica per il termine integrale, che aumenta il tipo del sistema per ridurre l'errore a regime

- se  $r$  è temporaneamente, le azioni dei guadagni  $K_p$  e  $K_d$  equivalgono sempre a quella di una molla e di uno smorzatore immaginari che fanno seguire a  $y$  la posizione di  $r$

## Esercizio

Dato un sistema dinamico di tipo 1, con  $K_v = 20$  e, a denominatore, due costanti di tempo (12.5 s e 0.2 s) e un termine quadratico con  $\omega_n = 30$  rad/s e  $z = 0.7$ :

1. studiare il modello con Matlab e discuterne le caratteristiche e successivamente, tramite una rete di correzione, fare in modo che:
2. il sistema abbia pulsazione di taglio fra 0.6 e 1 rad/s e MF compreso fra 40 e 55°
3. trovare i poli della F.T in ciclo chiuso e discuterne le proprietà

## Esercizio

Data la seguente F.T.:

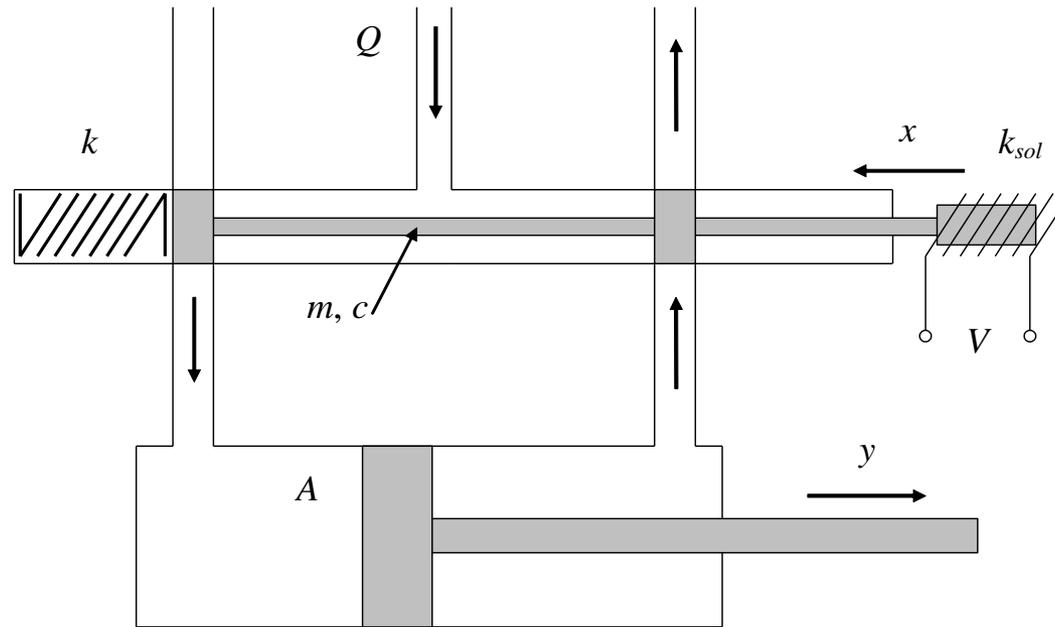
$$0.0012 s + 8e-005$$

---

$$s^4 + 0.17 s^3 + 0.02 s^2 + 0.0005 s + 3e-006$$

1. studiare il modello con Matlab e discuterne le caratteristiche e successivamente fare in modo che:
2. l'errore a regime sia nullo (per risposta a gradino di spazio)
3. il rise time sia  $< 15$  s
4. il sistema abbia un tempo di assestamento  $< 10 \times$  rise time
5. trovare i poli della F.T in ciclo chiuso e discuterne le proprietà

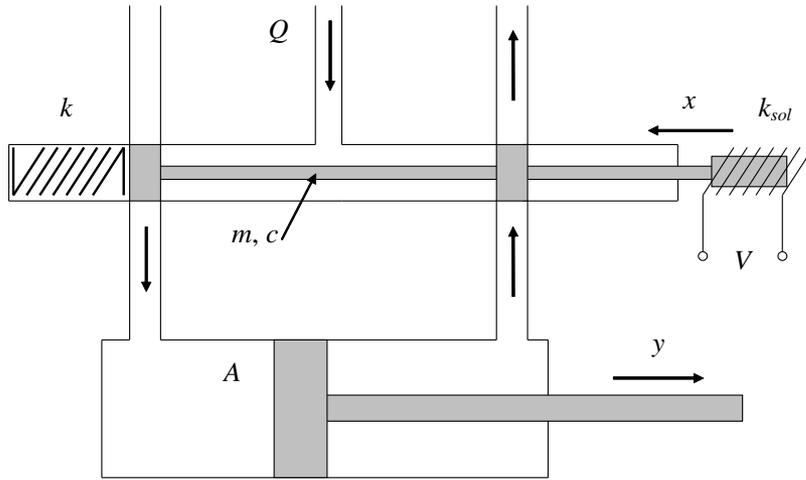
## Esempio di sistema con integratore puro (attuatore oleodinamico) (1)



Adottando un modello linearizzato e trascurando gli effetti dinamici nel circuito elettrico e le forze d'inerzia sul pistone di forza, le equazioni del sistema sono:

- solenoide  $F_{sol} = k_{sol} V$
- cassetto di distribuzione  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{sol}$
- portata attraverso la valvola  $Q = k_{val} x$
- movimento del pistone  $A\dot{y} = Q$

## Esempio di sistema con integratore puro (attuatore oleodinamico) (2)



Assumiamo come variabile di ingresso la tensione sul solenoide  $V$  e come variabile di uscita lo spostamento del pistone di forza  $y$ .

In questo modo, il sistema può essere rappresentato con il seguente schema a blocchi tramite funzioni di trasferta:

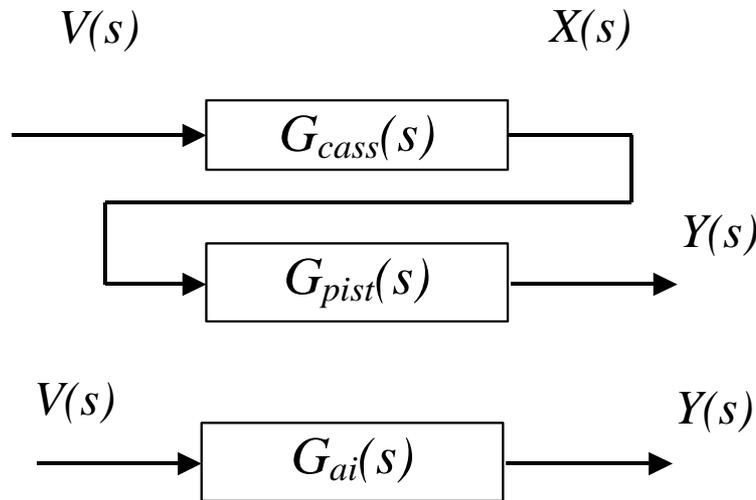
$$G_{cass}(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k_{sol}}{ms^2 + cs + k} = \frac{k_p}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

$$\text{con } \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \text{e} \quad k_p = \frac{k_{sol}}{k}$$

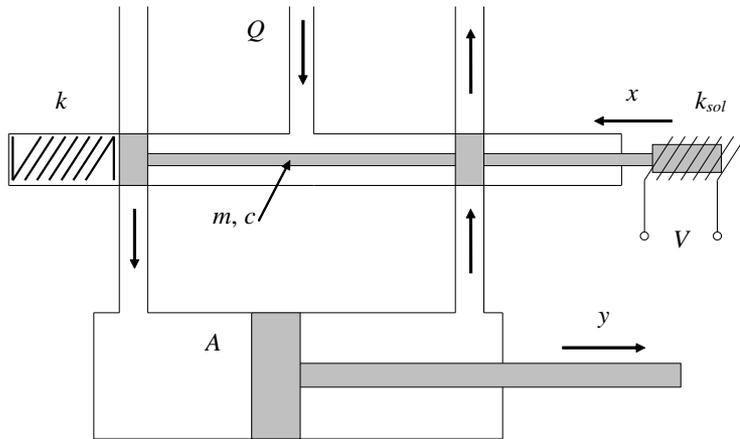
$$G_{pist}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_{val}}{As} = \frac{k_v}{s} \quad \text{con} \quad k_v = \frac{k_{val}}{A}$$

per cui definendo  $k_{vtot} = k_p k_v$  si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_{cass}(s)G_{pist}(s) = G_{ai}(s) = \frac{k_{vtot}}{s \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)}$$



## Esempio di sistema con integratore puro (attuatore oleodinamico) (3)



Mettiamo qualche dato numerico:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$c = 25 \text{ Ns/m}$$

$$k = 1000 \text{ N/m}$$

$$k_{sol} = 10 \text{ N/V}$$

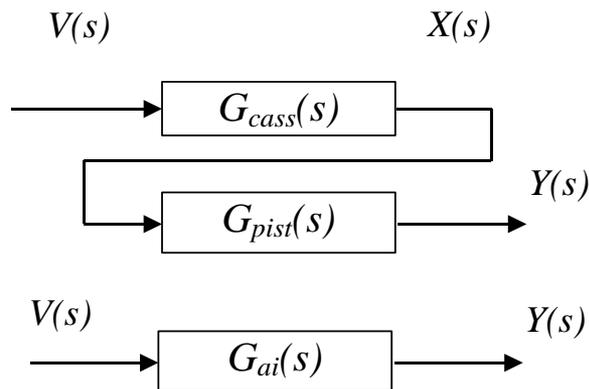
$$r_{pist} = 0.1 \text{ m}$$

$$A = \pi 0.1^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$k_{val} = 0.06280 \text{ m}^2/\text{s}$$

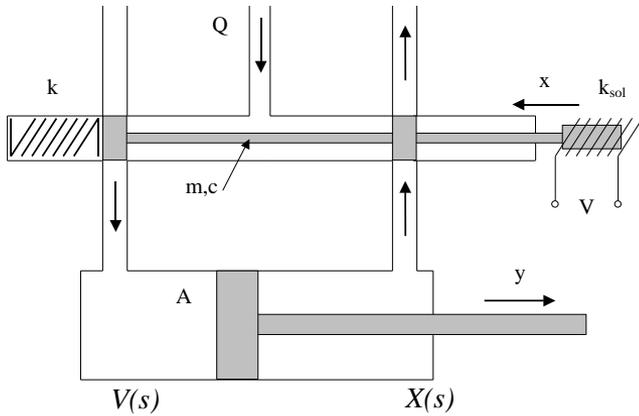
strumento di misura: trasforma lo spostamento in tensione con sensibilità 10 V/m

(spostamento pistone di forza  $\pm 0.5 \text{ m} = \pm 5 \text{ V}$  in uscita dallo strumento di misura)



- 1) costruire in Matlab il modello del sistema e analizzarne il comportamento in ciclo aperto
- 2) costruire il modello in catena chiusa con Matlab, con regolatore = 1, e analizzarne il comportamento

# Esempio di sistema con integratore puro (attuatore oleodinamico) (4)



Mettiamo qualche dato numerico:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$c = 25 \text{ Ns/m}$$

$$k = 1000 \text{ N/m}$$

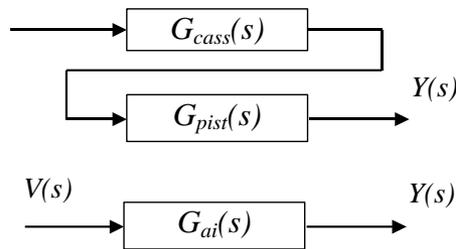
$$k_{sol} = 10 \text{ N/V}$$

$$r_{pist} = 0.1 \text{ m}$$

$$A = \pi 0.1^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$k_{val} = 0.06280 \text{ m}^2/\text{s}$$

strumento di misura: sensibilità 1 V/m



ESERCIZIO:

Trovare un regolatore che renda il sistema ( $V \rightarrow Y$ ) per quanto possibile preciso e pronto, senza perdere in stabilità.

(ATTENZIONE: il magnete ha una tensione di alimentazione  $\pm 20 \text{ V}$ ; lo spostamento del pistone è di 1 m; considerare )

(soluzione: un regolatore proporzionale puro con guadagno uguale a 20 è adeguato)

$$G_{cass}(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k_{sol}}{ms^2 + cs + k} = \frac{k_p}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

$$\text{con } \omega_n^2 = \frac{k}{m} \text{ e } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{ e } k_p = \frac{k_{sol}}{k}$$

$$G_{pist}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_{val}}{As} = \frac{k_v}{s} \quad \text{con } k_v = \frac{k_{val}}{A}$$

per cui definendo  $k_{vtot} = k_p k_v$  si ha

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_{cass}(s)G_{pist}(s) = G_{ai}(s) = \frac{k_{vtot}}{s \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)}$$

## Appendice: comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (1)

La definizione di una funzione di trasferta definita come rapporto fra polinomi è ottenibile in diversi modi; nel seguito sarà utilizzato solo il comando **tf**, che ha la seguente sintassi:

$$\text{nomefunzione} = \text{tf}(\text{numer}, \text{denom})$$

in cui **numer** e **denom** sono i coefficienti dei due polinomi a numeratore e denominatore, rispettivamente, a partire dal coefficiente di grado più alto. Il numero di termini coefficienti sarà pari al grado del polinomio+1. Dal punto di vista operativo, tali coefficienti rappresentano, in Matlab, un vettore, e sono pertanto rappresentabili con la sintassi (ad esempio per la variabile "numer"):

$$\text{numer} = [7 \ 3 \ -5 \ 1]$$

Questa sintassi definisce, pertanto, i coefficienti del seguente polinomio:

$$7s^3 + 3s^2 - 5s + 1$$

Come esempio, avendo già definito come sopra la variabile **numer**, il comando

$$\text{ga} = \text{tf}(\text{numer}, [9 \ 2 \ 5 \ 1 \ 6])$$

ottiene, in Matlab, il seguente output:

Transfer function:

$$7 s^3 + 3 s^2 - 5 s + 1$$

---

$$9 s^4 + 2 s^3 + 5 s^2 + s + 6$$

**N.B:** i comandi in grassetto sono comandi con la precisa sintassi di Matlab; gli studenti sono invitati a provarli, con eventuali variazioni, al fine di sperimentare direttamente le funzioni di questo software.

## Comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (2)

In tutti i casi il comando `tf` o i suoi argomenti possono essere moltiplicati per scalari, per rappresentare la eventuale presenza di guadagni:

$$\text{nomefunzione} = k1 * \text{tf}(k2 * \text{numer}, k3 * \text{denom})$$

esempio:

$$\mathbf{gb} = \text{tf}(\text{numer}, [1 \ 4 \ 5 \ 10 \ 2])$$

Transfer function:

$$7 s^3 + 3 s^2 - 5 s + 1$$

$$\text{-----}$$
$$s^4 + 4 s^3 + 5 s^2 + 10 s + 2$$

La presenza di eventuali poli nell'origine (termini  $1/s$ ) è introdotta ponendo = zero l'ultimo coefficiente del denominatore.

esempio:

$$\mathbf{gc} = \text{tf}([3 \ 4], [6 \ 7 \ 0])$$

Transfer function:

$$3 s + 4$$

$$\text{-----}$$
$$6 s^2 + 7 s$$

esempio (un integratore puro):

$$\mathbf{gd} = \text{tf}(1, [1 \ 0])$$

Transfer function:

$$1$$

$$-$$

$$s$$

## Comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (3)

Una volta definita una funzione di trasferta, se ne possono conoscere i poli con il comando:

*eig(nomefunzioneditrasferta)*

esempio:

**eig(gb)**

ans =

```
-3.3455  
-0.2171 + 1.6333i  
-0.2171 - 1.6333i  
-0.2202
```

Il comando

*damp(nomefunzioneditrasferta)*

fornisce, oltre a poli, anche le relative pulsazioni naturali e coefficienti di smorzamento "zeta" (damping). Questi due ultimi risultati hanno senso, in Matlab, solo per le coppie di poli complessi coniugati.

esempio:

**damp(gb)**

| Eigenvalue              | Damping   | Freq. (rad/s) |
|-------------------------|-----------|---------------|
| -2.20e-001              | 1.00e+000 | 2.20e-001     |
| -2.17e-001 + 1.63e+000i | 1.32e-001 | 1.65e+000     |
| -2.17e-001 - 1.63e+000i | 1.32e-001 | 1.65e+000     |
| -3.35e+000              | 1.00e+000 | 3.35e+000     |

## Comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (4)

La concatenazione di più funzioni di trasferta in cascata è effettuata dall'operatore "prodotto":

$$gab=ga*gb$$

### Funzioni di base di gestione delle sessioni e di memorizzazione delle variabili

In generale, Matlab fornisce funzioni di gestione delle sue variabili interne:

**who**

fornisce la lista delle variabili definite nella sessione corrente;

**nomevariabile**

mostra il contenuto della variabile "nomevariabile";

**clear**

cancella tutte le variabili definite nella sessione corrente.

E' inoltre possibile salvare tutte le variabili della sessione corrente mediante il comando

**"save workspace"** del menù file

E' possibile rileggere da disco un set di variabili salvate in una sessione precedente mediante:

**"load workspace"** del menù file

## Comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (5)

Matlab fornisce svariate funzioni di visualizzazione delle proprietà delle F.T.. Ne presentiamo alcune tramite esempi.

Definite e poi composte in un'unica funzione **g**, due F.T. **ga** e **gb**, seguente modo:

```
ga=tf(1,[10 1])
```

```
gb=tf(1,[1/50 1/20 1])
```

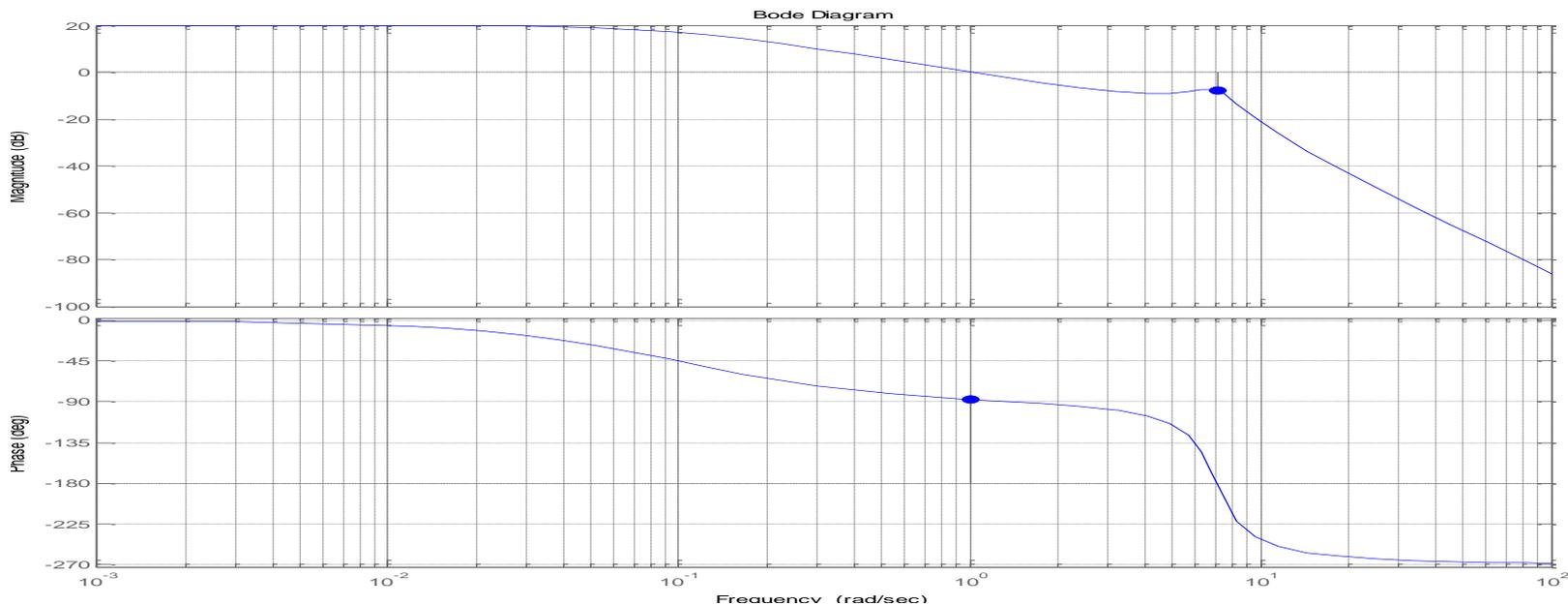
```
g=10*ga*gb
```

se ne ottiene il diagramma di bode in una figura di Matlab con il comando

```
bode(g)
```

```
(bode(ga,gb,gc) mostra i diagrammi delle tre F.T. ga, gb, gc)
```

Mediante il menù contestuale (pulsante destro del mouse sulla figura) è possibile sia visualizzare una griglia (*grid*) sia i valori dei MF e MG (*characteristics*), ottenendo la figura simile alla seguente:



## Comandi di base di Matlab per lo studio dei sistemi di controllo (6)

Analogamente, mediante il comando

**margin(g)**

si ottiene la seguente figura, che contiene l'indicazione esplicita dei valori del MF (Pm, *phase margin*) e del MG (Gm, *gain margin*) per la F.T. considerata.

